

IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW LEPKOSPREŻYSTEGO TŁUMIKA DRGAŃ

Roman Lewandowski, Bartosz Chorążyczewski

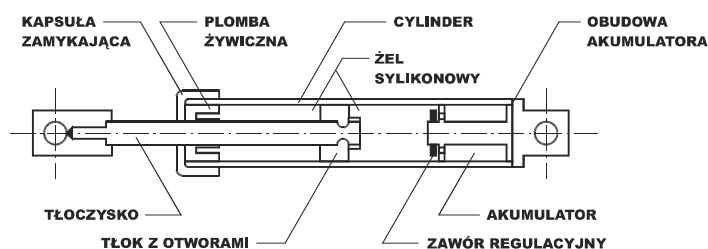
Politechnika Poznańska, Instytut Konstrukcji Budowlanych
ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań
e-mail: roman.lewandowski@put.poznan.pl, bartosz.chorazyczewski@ikb.poznan.pl

Abstract: *In the paper a new method of parameters identification of the three parameters fractional, rheological Kelvin model is presented. The parameters are estimated using results obtained from dynamical tests. The proposed method is simple and effective. Results of example calculation are presented and briefly discussed.*

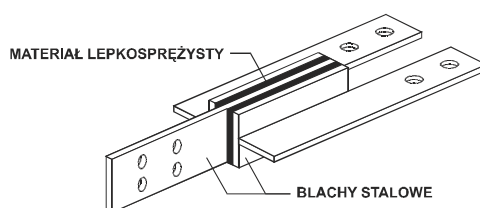
1. WPROWADZENIE

We współczesnym budownictwie obserwuje się stałe dążenie do projektowania i budowania konstrukcji coraz większych, budowanych z materiałów lekkich o podwyższonych parametrach wytrzymałościowych. Konstrukcje te są lekkie, wiotkie, mają mniejsze możliwości tłumienia. Wszystko to sprawia, że są bardziej wrażliwe na obciążenia dynamiczne. W wielu wypadkach zachodzi potrzeba redukcji przyspieszeń lub/i przemieszczeń dynamicznych tego typu konstrukcji. Jeden ze sposobów redukcji drgań polega na wbudowaniu w konstrukcję pasywnych tłumików drgań. Rolą pasywnych tłumików drgań jest rozpraszanie (najczęściej przez zamianę na ciepło) części energii przekazywanej konstrukcji przez działające na nią obciążenie zewnętrzne. Obszerne omówienie możliwych do zastosowania tłumików drgań można znaleźć w pracach [1, 2].

Do najczęściej stosowanych tłumików drgań zalicza się tłumiki lepkosprężyste. Tłumiki tego rodzaju dzieli się na lepkosprężyste tłumiki cieczowe i lepkosprężyste tłumiki wykonane z materiałów stałych. Przykładowy tłumik cieczowy pokazano na schematycznie Rys. 1, a na Rys. 2 pokazano schematycznie tłumik lepkosprężysty wykonany z materiałów stałych. Cylinder tłumika cieczowego jest wypełniony żelem silikonowym – cieczą o bardzo dużej lepkości. Typowy tłumik lepkosprężysty składa się z dwóch warstw materiału (o właściwościach lepkosprężystych) przymocowanych do płyt stalowych w sposób pokazany na Rys. 2. Warstwy lepkosprężyste są wykonane z kopolimerów (najczęściej akrylowych) lub z substancji szklanych. Materiały lepkosprężyste rozpraszają energię w trakcie odkształceń postaciowych powodowanych ruchem płyt stalowych względem siebie. Mają dobre właściwości tłumiące, mogą rozpraszać energię także wtedy, gdy częstota siły wymuszającej jest mała. Istotną cechą materiałów lepkosprężystych stosowanych



Rysunek 1: Schemat tłumika cieczowego



Rysunek 2: Schemat tłumika wykonanego z materiału lepkosprężystego

do budowy omawianych tłumików jest zależność ich właściwości lepkosprężystych od temperatury i częstości wymuszenia.

Analiza konstrukcji z wbudowanymi lepkosprężystymi tłumikami drgań wymaga dobrej znajomości właściwości dynamicznych tłumików. Właściwości te zależą w głównej mierze od właściwości reologicznych materiału lepkosprężystego, z którego tłumik jest zbudowany oraz od konstrukcji tłumika w przypadku tłumika cieczowego.

Mechaniczny model tłumika jest modelem reologicznym i składa się ze zbioru odpowiednio połączonych sprężyn i tłumików (patrz prace [3, 4]). W tym ujęciu do poprawnego opisu zachowania pojedynczego tłumika używa się układu równań różniczkowych [4]. W istotny sposób zwiększa to wymiar zadania dynamicznego. Ponadto procedura wyznaczania parametrów takiego modelu tłumika jest bardzo kłopotliwa (patrz [5, 6]).

Ostatnio do opisu właściwości tłumików lub materiałów lepkosprężystych zaczęto używać tzw. ułamkowych modeli reologicznych (the fractional rheological models) oraz ułamkowego rachunku różniczkowego (the fractional calculus). Ułamkowe modele reologiczne rozważa się, między innymi, w pracach [7-10]. Istotną zaletą ułamkowych modeli reologicznych jest możliwość opisu dynamicznego zachowania tłumika za pomocą jednego równania zawierającego małą liczbę parametrów.

Ważnym problemem związanym z zastosowaniem ułamkowych modeli reologicznych jest identyfikacja parametrów modelu na podstawie danych doświadczalnych. Proces identyfikacji parametrów modelu jest tzw. problemem odwrotnym, który niekiedy może być źle uwarunkowany. Procedury identyfikacji parametrów ułamkowych modeli reologicznych omawiane są w pracach [7, 8, 10-12].

W niniejszej pracy przedstawia się nową metodę identyfikacji parametrów trójparametrowego, ułamkowego modelu reologicznego, który może być użyty do opisu dynamicznego zachowania tłumika lepkosprężystego. Zakłada się, że dysponuje się wynikami badań dynamicznych tłumika poddanego działaniu obciążeń harmonicznie zmiennych.

W pracy używa się trzech symboli do opisu siły w tłumiku. Symbol $u_e(t)$ oznacza wyniki pomiarów eksperymentalnych, $\tilde{u}(t)$ funkcję analityczną aproksymującą wyniki eksperymentalne, a symbol $u(t)$ rozwiązanie analityczne równania ewolucji ułamkowego modelu reologicznego. Podobne należy rozumieć oznaczenia $q_e(t)$, $\tilde{q}(t)$ i $q(t)$, które będą stosowane do opisu względnych przemieszczeń tłumika.

2. OPIS UŁAMKOWEGO MODELU REOLOGICZNEGO

W pracy rozpatruje się ułamkowy model reologiczny pokazany na Rys. 3. Pod względem budowy model różni się od modelu klasycznego tym, że zamiast elementu tłumiącego mamy element typu springpot. Zachowanie elementu *springpot* opisuje równanie:

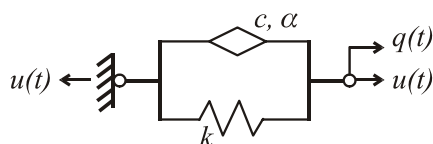
$$u(t) = \tilde{c}^\alpha D_t^\alpha q(t) = c D_t^\alpha q(t) , \quad (1)$$

gdzie $c = \tilde{c}^\alpha$ oraz α , $0 < \alpha \leq 1$, to parametry elementu, a symbol $D_t^\alpha q(t)$ oznacza pochodną ułamkową rzędu α ze względu na czas t . Szersze omówienie podstaw rachunku pochodnych ułamkowych można znaleźć w pracy [13]. Istnieje kilka definicji pochodnych ułamkowych. Tutaj symbol $D_t^\alpha q(t)$ oznacza pochodną ułamkową Riemanna-Liouville'a z dolną granicą w $-\infty$ (patrz [13]). Omawiany element może być rozumiany jako element o właściwościach pośrednich między elementem sprężystym, który otrzymamy podstawiając $\alpha = 0$ w (1), a elementem tłumiącym, który otrzymamy podstawiając $\alpha = 1$.

Zachowanie modelu pokazanego na Rys. 3 opisują zależności:

$$u(t) = kq(t) + k\tau^\alpha D_t^\alpha q(t) , \quad (2)$$

gdzie $\tau^\alpha = c/k$ a symbolami k i c oznaczono odpowiednio współczynnik sztywności i współczynnik tłumienia.



Rysunek 3: Model reologiczny rozpatrywanego tłumika drgań

3. ROZWIĄZANIE USTALONE RÓWNIANIA EWOLUCJI ORAZ WARUNKI TERMODYNAMICZNEJ ZGODNOŚCI UŁAMKOWEGO MODELU REOLOGICZNEGO

Dynamiczne badania tłumików drgań przeprowadza się w ten sposób, że tłumik poddawany jest obciążeniu harmonicznemu, a po wytlumieniu drgań przejściowych mierzy się odpowiedź dynamiczną tłumika w stanie ustalonym drgań. Badania te przeprowadza się dla różnych częstości wymuszenia λ .

Biorąc pod uwagę powyższe stwierdzenia zakłada się, że w stanie ustalonym drgań zachowanie tłumika opisują funkcje:

$$u(t) = u_c \cos \lambda t + u_s \sin \lambda t, \quad q(t) = q_c \cos \lambda t + q_s \sin \lambda t. \quad (3)$$

Po podstawieniu zależności (3) do równania ewolucji (2) i uwzględnieniu, że (patrz [13])

$$D_t^\alpha (\cos \lambda t) = \cos(\lambda t + \alpha\pi/2), \quad D_t^\alpha (\sin \lambda t) = \sin(\lambda t + \alpha\pi/2), \quad (4)$$

dochodzi się do następujących zależności:

$$u_c = \varphi_1 q_c + \varphi_2 q_s, \quad u_s = -\varphi_2 q_c + \varphi_1 q_s, \quad (5)$$

$$\varphi_1 = k \left[1 + (\tau\lambda)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) \right], \dots, \varphi_2 = k(\tau\lambda)^\alpha \sin(\alpha\pi/2). \quad (6)$$

W pracy [14] podano warunki jakie muszą być spełnione aby ułamkowy model reologiczny spełniał wymagania wynikające z drugiego prawa termodynamiki. Warunki te sprowadzają się do wymagania, aby zależne od częstości wymuszenia moduł sprężystości $K'(\lambda)$ (ang. storage modulus) i moduł dyssypacji $K''(\lambda)$ (ang. loss modulus) miały wartości dodatnie dla wszystkich możliwych częstości wymuszenia.

Wielkości te są opisane zależnościami:

$$K' = k \left[1 + (\tau\lambda)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) \right], \quad K'' = k(\tau\lambda)^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (7)$$

Łatwo zauważyć, że $K'(\lambda) \geq 0$ i $K''(\lambda) \geq 0$ dla wszystkich λ o ile $0 \leq \alpha \leq 1$. Wobec tego rozpatrywany model reologiczny spełniają warunki wynikające z drugiego prawa termodynamiki.

4. RÓWNANIA PĘTLI HISTEREZY

Właściwości tłumiące tłumika są często charakteryzowane za pomocą pętli histerezy. Równanie pętli histerezy rozpatrywanego modelu tłumika wyprowadzimy zakładając, że:

$$q(t) = q_0 \sin \lambda t. \quad (8)$$

Biorąc pod uwagę, że (patrz [13], str. 311)

$$D_t^\alpha q(t) = \lambda^\alpha q_0 \sin[\lambda t + (\alpha\pi/2)], \quad (9)$$

oraz podstawiając (8) i (9) do równania (2) otrzymuje się

$$u(t) = k \left[1 + (\tau\lambda)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) \right] q_0 \sin \lambda t + k(\tau\lambda)^\alpha q_0 \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \lambda t, \quad (10)$$

które po uwzględnieniu (8) i tożsamości

$$\sin^2(\alpha\pi/2) + \cos^2(\alpha\pi/2) = 1, \quad (11)$$

można przepisać w postaci:

$$\left\{ \frac{u(t) - k \left[1 + (\tau\lambda)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) \right] q(t)}{k (\tau\lambda)^\alpha q_0 \sin(\alpha\pi/2)} \right\}^2 + \left[\frac{q(t)}{q_0} \right]^2 = 1 . \quad (12)$$

Zależność (12) jest poszukiwanym równaniem pętli histerezy ułamkowego modelu Kelvinina.

Możliwe jest zapisanie równania pętli histerezy w innej postaci. Teraz zakłada się, że przemieszczenia tłumika są opisane funkcją:

$$q(t) = q_0 \sin[\lambda t - (\alpha\pi/2)] , \quad (13)$$

co oznacza, że

$$D_t^\alpha q(t) = \lambda^\alpha q_0 \sin \lambda t . \quad (14)$$

Po podstawieniu zależności (14) do równania (2) można napisać:

$$u(t) - k \tau^\alpha D_t^\alpha q(t) = k q_0 [\sin \lambda t \cos(\alpha\pi/2) - \cos \lambda t \sin(\alpha\pi/2)] . \quad (15)$$

Po uwzględnieniu (11) i (14) można napisać drugą wersję równania pętli histerezy w postaci:

$$\left\{ \frac{u(t) - \frac{k}{\lambda^\alpha} [(\tau\lambda)^\alpha + \cos(\alpha\pi/2)] D_t^\alpha q(t)}{k q_0 \sin(\alpha\pi/2)} \right\}^2 + \left[\frac{D_t^\alpha q(t)}{\lambda^\alpha q_0} \right]^2 = 1 . \quad (16)$$

Na Rys. 4 pokazano, dla różnych wartości parametru α , wykresy pętli histerezy. Obliczenia wykonano przyjmując następujące dane: $k = 100.0 \text{ kN/m}$, $c = 100000.0 \text{ Ns/m}$, $\lambda = 10,0 \text{ Hz}$. Widać, że właściwości tłumiące tłumika zmniejszają się wraz ze zmniejszaniem się wartości parametru α .

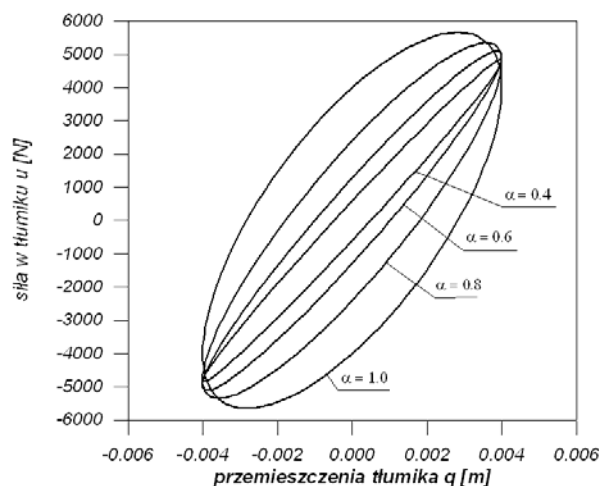
5. IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW UŁAMKOWEGO MODELU REOLOGICZNEGO

Załóżmy, że po przeprowadzeniu badań dynamicznych tłumika lepkosprężystego dysponujemy przebiegami dynamicznymi sił $u_{ei}(t)$ i przemieszczeń tłumika $q_{ei}(t)$ otrzymanymi dla pewnego zbioru częstości wymuszenia λ_i , ($i = 1, 2, \dots, n$).

Proponowana metoda identyfikacji składa się z dwóch zasadniczych części. W pierwszej części procedury dokonuje się aproksymacji wyników doświadczalnych funkcjami trygonometrycznymi opisującymi rozwiązanie ustalone równania ewolucji (3). W drugiej części procedury identyfikacyjnej wyznaczone zostaną parametry omawianego modelu tłumika drgań.

Dla częstości wymuszenia λ_i wyniki eksperymentalne są aproksymowane funkcjami:

$$\tilde{u}_i(t) = \tilde{u}_{ci} \cos \lambda_i t + \tilde{u}_{si} \sin \lambda_i t , \quad \tilde{q}(t) = \tilde{q}_{ci} \cos \lambda_i t + \tilde{q}_{si} \sin \lambda_i t . \quad (17)$$

Rysunek 4: Wykresy pętli histerezy dla różnych wartości parametru α

Sposób wyznaczania nieznanymi współczynników \tilde{u}_{ci} , \tilde{u}_{si} , \tilde{q}_{ci} oraz \tilde{q}_{si} zostanie omówiony na przykładzie funkcji aproksymującej pomierzone zmiany siły w tłumiku. Do wyznaczenia wspomnianych współczynników stosuje się metodę najmniejszych kwadratów.

Funkcjonał błędu przyjęto o postaci:

$$J_{ui}(\tilde{u}_{ci}, \tilde{u}_{si}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (\tilde{u}_i(t) - u_{ei}(t))^2 dt . \quad (18)$$

W funkcyjale (18) symbole t_1 i t_2 oznaczają odpowiednio początek i koniec przedziału czasu, w którym wykonano pomiar siły w tłumiku.

Z warunku stacjonarności funkcyjala (18) otrzymuje się następujący układ równań:

$$I_{cc}\tilde{u}_{ci} + I_{sc}\tilde{u}_{si} = I_{cu} , \dots , I_{sc}\tilde{u}_{ci} + I_{ss}\tilde{u}_{si} = I_{su} , \quad (19)$$

gdzie

$$I_{cc} = \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 \lambda_i t dt , \quad I_{ss} = \int_{t_1}^{t_2} \sin^2 \lambda_i t dt , \quad I_{cs} = I_{sc} = \int_{t_1}^{t_2} \sin \lambda_i t \cos \lambda_i t dt , \quad (20)$$

$$I_{cu} = \int_{t_1}^{t_2} u_{ei}(t) \cos \lambda_i t dt , \quad I_{su} = \int_{t_1}^{t_2} u_{ei}(t) \sin \lambda_i t dt . \quad (21)$$

Z układu równań (21) wyznacza się poszukiwane współczynniki \tilde{u}_{ci} i \tilde{u}_{si} . Współczynniki \tilde{q}_{ci} oraz \tilde{q}_{si} wyznacza się w analogiczny sposób.

W drugiej części omawianej procedury identyfikacyjnej wyznacza się parametry rozpatrywanego tłumika drgań. Opracowano dwa sposoby identyfikacji parametrów. Pierwszy sposób wykorzystuje wyprowadzone powyżej równanie pętli histerezy (12).

Jeżeli dla zadanej częstości wymuszenia λ_i w chwili $t = t_1$ $q(t_1) = q_{0i} > 0$ i $u(t_1) = u_{1i} > 0$ to z (12) otrzymuje następującą zależność:

$$k \left[1 + (\tau \lambda_i)^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} \right] = k + c \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} = \frac{u_{1i}}{q_{0i}} . \quad (22)$$

Ponadto, jeżeli w chwili $t = t_2$ $q(t_2) = 0$ i $u(t_2) = u_{2i} > 0$ to z (12) otrzymuje się:

$$k (\tau \lambda_i)^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2} = c \lambda_i^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2} = \frac{u_{2i}}{q_{0i}} . \quad (23)$$

Dla zadanej częstości wymuszenia λ_i równania (22) i (23) tworzą nieliniowy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi: k, c, α lub k, τ, α . Zauważmy, że dla zadanej wartości α układ ten staje się układem liniowym ze względu na k i c .

W trakcie badań tłumik jest wielokrotnie obciążany siłowo lub kinematycznie z różnymi częstościami, które to częstości oznaczamy symbolem λ_i , przy czym $i = 1, 2, \dots, n$. W trakcie badań mierzy się przemieszczenia tłumika $q_{ei}(t)$ i siły w tłumiku $u_{ei}(t)$. Ponadto po wykonaniu pierwszego etapu identyfikacji łatwo można ustalić, wynikające z badań eksperymentalnych, wartości $u_{1i} = \tilde{u}_{1i}$, $u_{2i} = \tilde{u}_{2i}$ oraz $q_{0i} = \tilde{q}_{0i}$. Teraz zakłada się, że wynikające z doświadczeń wartości \tilde{u}_{1i} , \tilde{u}_{2i} oraz \tilde{q}_{0i} w przybliżeniu spełniają równania (22) i (23). Dla każdej częstości wymuszenia λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) można wobec tego napisać:

$$r_i = k + c \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} - \frac{\tilde{u}_{1i}}{\tilde{q}_{0i}} \neq 0, \quad s_i = c \lambda_i^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2} - \frac{\tilde{u}_{2i}}{\tilde{q}_{0i}} \neq 0 . \quad (24)$$

W powyższych równaniach symbolami r_i i s_i oznaczono reszty jakie otrzymuje się po podstawieniu danych eksperymentalnych do równań (22) i (23). Dla $i = 1, 2, \dots, n$ z (24) wynika nadokreślony układ nieliniowych równań algebraicznych ze względu na parametry tłumika k, c i α .

Pseudo-rozwiązaniem tego układu równań jest taki zbiór wartości k, c i α który minimalizuje funkcjonal błędów o postaci:

$$J(k, c, \alpha) = \sum_{i=1}^n (r_i^2 + s_i^2) . \quad (25)$$

Załóżmy, że wartość parametru α jest zadana. Z warunków stacjonarności funkcjonalu (26) ze względu na parametry k i c otrzymuje się następujący układ równań:

$$k n + c \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{u}_{1i}}{\tilde{q}_{0i}},$$

$$k \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} + c \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2\alpha} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \left(\frac{\tilde{u}_{1i}}{\tilde{q}_{0i}} \cos \frac{\alpha \pi}{2} + \frac{\tilde{u}_{2i}}{\tilde{q}_{0i}} \sin \frac{\alpha \pi}{2} \right). \quad (26)$$

Optymalną wartość parametru α wyznacza się metodą systematycznego przeszukiwania zbioru wartości dopuszczalnych. Wybiera się zbiór wartości α oznaczonych symbolami α_j ($j = 1, 2, \dots, m$), gdzie $\alpha_j = \alpha_{j-1} + \Delta\alpha$. Dla każdej wartości α_j z układu równań (26) wyznacza się odpowiadające jej wartości k_j i c_j dwóch pozostałych parametrów. Te wartości α_j , k_j i c_j dla których funkcjonal (25) ma wartość minimalną są poszukiwanym rozwiązaniem układu równań (24) i rozwiązaniem omawianego problemu identyfikacji.

Punktem wyjścia do opisu drugiego sposobu identyfikacji parametrów tłumika drgań są równania (5). Przyjmijmy, że w równaniach tych niewiadomymi są wielkości oznaczone symbolami φ_1 i φ_2 . Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymuje się:

$$\varphi_1 = \frac{q_c u_c + q_s u_s}{q_c^2 + q_s^2}, \quad \varphi_2 = \frac{q_s u_c - q_c u_s}{q_c^2 + q_s^2}. \quad (27)$$

Posługując się rezultatami pierwszego etapu procedury identyfikacyjnej można, dla każdej częstości wymuszenia λ_i , obliczyć φ_1 i φ_2 . Można wobec tego napisać:

$$\tilde{\varphi}_{1i} = \frac{\tilde{q}_{ci} \tilde{u}_{ci} + \tilde{q}_{si} \tilde{u}_{si}}{\tilde{q}_{ci}^2 + \tilde{q}_{si}^2}, \quad \tilde{\varphi}_{2i} = \frac{\tilde{q}_{si} \tilde{u}_{ci} - \tilde{q}_{ci} \tilde{u}_{si}}{\tilde{q}_{ci}^2 + \tilde{q}_{si}^2}, \quad (28)$$

gdzie symbolami \tilde{q}_{ci} , \tilde{q}_{si} , \tilde{u}_{ci} i \tilde{u}_{si} oznaczono wielkości uzyskane w trakcie pierwszego etapu identyfikacji.

Z drugiej strony wielkości φ_1 i φ_2 dane są wzorami (6). Teraz zakłada się, że $\varphi_{1i} \approx \tilde{\varphi}_{1i}$ a $\varphi_{2i} \approx \tilde{\varphi}_{2i}$. Ponieważ omawiane równości będą spełnione tylko z pewnym przybliżeniem to można napisać (dla każdej częstości wymuszenia) następujące równania:

$$r_i = k + c \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} - \tilde{\varphi}_{1i} = 0, \quad s_i = c \lambda_i^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2} - \tilde{\varphi}_{2i} = 0. \quad (29)$$

Podobnie jak poprzednio równania (29) to nieliniowy, nadokreślony układ równań algebraicznych ze względu na parametry k , c i α . Pseudo-rozwiązanie tego układu ma być określone w ten sposób aby funkcjonal błędu (26) osiągał wartość minimalną.

Jeżeli wartość parametru α będzie zadana to z warunków stacjonarności funkcjonału (26) ze względu na parametry k i c wynika następujący układ równań:

$$k n + c \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} = \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_{1i} ,$$

$$k \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} + c \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2\alpha} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \left(\tilde{\varphi}_{1i} \cos \frac{\alpha \pi}{2} + \tilde{\varphi}_{2i} \sin \frac{\alpha \pi}{2} \right) . \quad (30)$$

Optymalną wartość parametru α określa się stosując opisaną wcześniej procedurę systematycznego przeszukiwania zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Oczywiście można zastosować w tym celu również inne procedury optymalizacyjne.

6. WYNIKI PRZYKŁADOWEJ IDENTYFIKACJI PARAMETRÓW MODELU

Przeprowadzono procedurę identyfikacyjną posługując się sztucznie wygenerowanymi danymi doświadczalnymi. Dla zbioru 9 częstości wymuszenia wyznaczono, posługując się wzorami (5) i (6), wartości u_{ci} , u_{si} , q_{ci} oraz q_{si} . Tak otrzymane wartości omawianych współczynników zostały losowo zaburzone przy użyciu generatora liczb losowych. Zaburzone wartości \tilde{u}_{ci} , \tilde{u}_{si} , \tilde{q}_{ci} i \tilde{q}_{si} współczynników wyznaczano ze wzorów:

$$\tilde{u}_{ci} = u_{ci}(1 + \varepsilon\gamma), \quad \tilde{u}_{si} = u_{si}(1 + \varepsilon\gamma), \quad \tilde{q}_{ci} = q_{ci}(1 + \varepsilon\gamma), \quad \tilde{q}_{si} = q_{si}(1 + \varepsilon\gamma) . \quad (31)$$

gdzie symbolami γ i ε oznaczono odpowiednio liczbę losową o rozkładzie równomiernym wziętą z przedziału $\langle -1, +1 \rangle$ i poziom szumów.

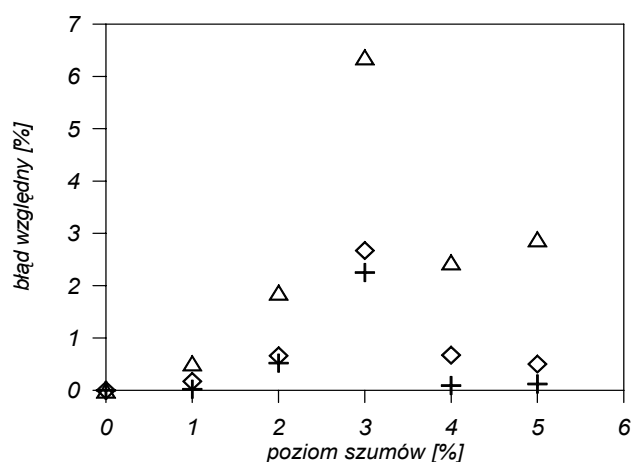
Następujące dane: $n = 9$, $\lambda_1 = 0,5 \text{ Hz}$, $\lambda_2 = 1,0 \text{ Hz}$, $\lambda_3 = 2,0 \text{ Hz}$, $\lambda_4 = 4,0 \text{ Hz}$, $\lambda_5 = 6,0 \text{ Hz}$, $\lambda_6 = 8,0 \text{ Hz}$, $\lambda_7 = 10,0 \text{ Hz}$, $\lambda_8 = 12,5 \text{ Hz}$, $\lambda_9 = 15,0 \text{ Hz}$, $\alpha = 0.6$, $k = 290,0 \text{ kN/m}$, $c = 68,0 \text{ kNs/m}$, $u_c = 0,0 \text{ kN}$, $u_s = 0,30 \text{ kN}$ posłużyły do wyznaczania sztucznych danych doświadczalnych.

Po zastosowaniu pierwszego sposobu identyfikacji otrzymano następujące wyniki: $\alpha = 0.601$, $k = 290,469 \text{ kN/m}$, $c = 67,7862 \text{ kNs/m}$. Po zastosowaniu drugiego sposobu identyfikacji i wprowadzeniu szumów o intensywności $\varepsilon = 0,03$ otrzymano: $\alpha = 0.609$, $k = 292,115 \text{ kN/m}$ i $c = 64,984 \text{ kNs/m}$. Rezultaty uzyskane za pomocą obu procedur identyfikacyjnych pozostają w dobrej zgodności z wynikami dokładnymi.

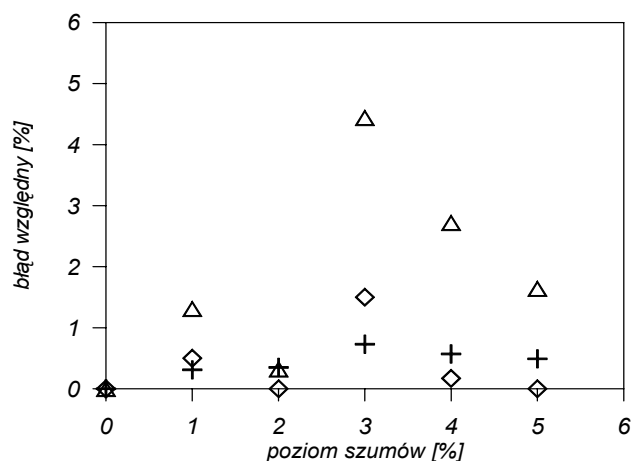
Wykonano również obliczenia dla różnych poziomów szumu wziętych z przedziału $0 - 0,05$. Wyniki obliczeń przedstawiono na Rys. 5 i 6. Widać, że błędy wyznaczenia parametrów modelu są tego samego rzędu co poziom szumów reprezentujących błędy pomiarowe. Na Rys. 7 pokazano wykres funkcjonalu błędu w zależności od wartości parametru α . Widać, że ma on jedno maksimum.

Wykonano również obliczenia posługując się danymi doświadczalnymi dla tłumika zbudowanego z użyciem materiału VHB 4959 firmy 3M. Tłumik złożony z dwóch warstw materiału lepkosprężystego, każda o grubości 3 mm zaprojektowano tak, aby pracował wyłącznie na ścinanie. Testy przeprowadzono na stanowisku MTS 810. W doświadczeniu wykorzystano następujące czujniki: przetwornik siły S9, przetwornik przemieszczeń WA100 oraz przetwornik przyspieszeń B12 (wszystkie produkcji Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH). Dane zbierano i przetwarzano za pomocą pakietu CATMAN firmy HBM. Parametry modelu

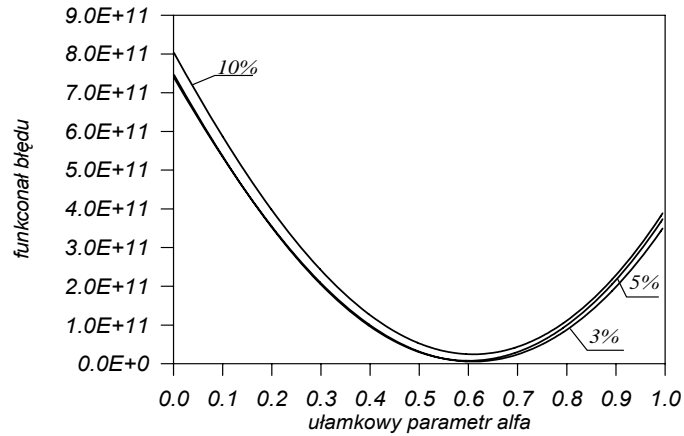
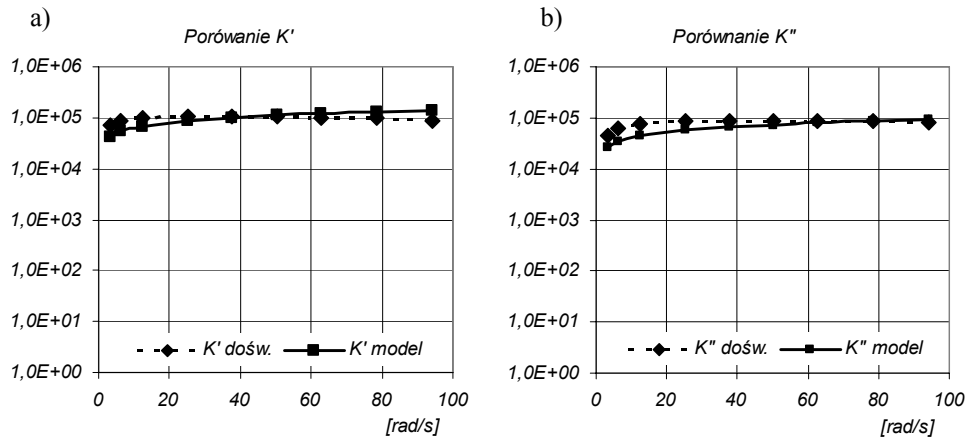
ułamkowego obliczono posługując się 2 metodą identyfikacji. Otrzymano następujące wartości parametrów: $\alpha = 0,3755$, $k = 2603,1 \text{ N/m}$ i $c = 30333,9 \text{ Ns/m}$. Rezultaty obliczeń przedstawiono również na Rys. 8a i 8b, na których porównano ustalone w trakcie pierwszego etapu identyfikacji wartości modułów $K'(\lambda)$ i $K''(\lambda)$ z wartościami wyznaczonymi ze wzorów (7). Na wspomnianych rysunkach rezultaty 1 etapu identyfikacji oznaczono rombami, a wartości wynikające ze wzorów (7) małymi kwadratami. Otrzymane rezultaty upoważniają do stwierdzenia, że zaproponowany model nadaje się do opisu dynamicznego zachowania tłumików lepkosprężystych.



Rysunek 5: Względne błędy parametru α (romb), parametru k (krzyżyk) i parametru c (trójkąt) w zależności od poziomu szumów – pierwsza metoda identyfikacji parametrów



Rysunek 6: Względne błędy parametru α (romb), parametru k (krzyżyk) i parametru c (trójkąt) w zależności od poziomu szumów – druga metoda identyfikacji

Rysunek 7: Zależność funkcjonatu błędu od parametru α Rysunek 8: Porównanie wartości modułu: a) $K'(\lambda)$, b) $K''(\lambda)$.

7. UWAGI KOŃCOWE

W pracy omówiono metodę wyznaczania parametrów ułamkowego, trójparametrowego modelu Kelvina, który może być wykorzystany jako model obliczeniowy tłumika lepkosprężystego. Opisana metoda identyfikacji parametrów modelu jest stosunkowo prosta i efektywna pod względem numerycznym. Przedstawione wyniki identyfikacji parametrów wybranego materiału lepkosprężystego upoważniają do stwierdzenia, że zaproponowany model nadaje się do opisu dynamicznego zachowania tłumików lepkosprężystych.

Podziękowania

Praca powstała w ramach tematu DS 11-018/08.

LITERATURA

- [1] C. Christopoulos, A. Filiatrault, *Principles of passive supplemental damping and seismic isolation*, IUSS Press, Pavia, Italy, 2006.
- [2] R. Lewandowski, *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2006.
- [3] S. W. Park, Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control, *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**, 8065 – 8092.
- [4] A. Palmeri, F. Ricciardelli, A. De Luca, G. Muscolino, State space formulation for linear viscoelastic dynamic systems with memory, *Journal of Engineering Mechanics*, 2003, **129**, 715 – 724.
- [5] S. Gerlach, A. Matzenmiller, Comparison of numerical methods for identification of viscoelastic line spectra from static test data, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **63**, 428 – 454.
- [6] S.M.F.D Syed Mustapha, T. N. Philips, A dynamic nonlinear regression method for the determination of the discrete relaxation spectrum, *Journal of Physics D*, 2000, **33**, 1219 – 1229.
- [7] A. Aprile, J. A. Inaudi, J. M. Kelly, Evolutionary Model of Viscoelastic Dampers for Structural Applications, *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 551-560.
- [8] N. Makris, M. C. Constantinou, Fractional-derivative Maxwell model for viscous dampers, *Journal of Structural Engineering*, 1991, **117**, 2708 – 2724.
- [9] R. L. Bagley, P. J. Torvik, Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, *AIAA J.*, 1989, **27**, 1412 – 1417.
- [10] A. Schmidt, L. Gaul, Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives, *Journal of Nonlinear Dynamics*, 2002, **29**, 37 – 55.
- [11] T. Pritz, Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials, *Journal of Sound and Vibration*, 1996, **195**, 103-115.
- [12] T. Pritz, Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials, *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **265**, 935 – 952
- [13] I. Podlubny, *Fractional Differential equations*, Academic Press, 1999.
- [14] A. Lion, Thermomechanically consistent formulations of the standard linear solid using fractional derivatives, *Arch. Mech.*, 2001, **53**, 253 – 273.