

Optymalne rozmieszczanie tłumików lepkosprężystych na ramie płaskiej

Maciej Dolny
Piotr Cybulski

Poznań 2011



Spis treści

1. Wprowadzenie	3
1.1. Cel opracowania	3
1.2. Znaczenie tłumików drgań	3
2. Omówienie sposobu rozwiązania problemu	3
2.1. Równania ruchu ramy z i bez tłumików drgań	3
2.1.1. Równania ruchu ramy bez tłumików	3
2.1.2. Równania ruchu ramy z tłumikami	4
2.2. Wpływ trzęsienia ziemi na konstrukcję	4
2.3. Charakterystyki dynamiczne ram z tłumikami	5
2.4. Opis tłumików – uogólniony model reologiczny Kelvina	7
2.4.1. Opis elementów składowych uogólnionego modelu Kelvina	7
2.4.2. Opis prostego elementu Kelvina	7
2.4.3. Opis uogólnionego modelu Kelvina	9
2.5. Opis elementów skończonych użytych do modelowania ramy	11
2.5.1. Opis elementu prętowego	11
2.5.2. Opis elementu kratowego	13
2.6. Krzywe rezonansowe	14
3. Opis analizowanej ramy	15
3.1. Omówienie danych przyjętych do obliczeń	15
3.2. Schemat statyczny ramy	16
4. Omówienie wyników obliczeń	17
4.1. Opis procesu optymalizacji	17
4.2. Maksymalne amplitudy drgań poziomych dla różnych położeń tłumików i odpowiadające im krzywe rezonansowe	18
4.2.1. Optymalizacja położenia pierwszego tłumika drgań	18
4.2.2. Optymalizacja położenia drugiego tłumika drgań	19
4.2.3. Optymalizacja położenia trzeciego tłumika drgań	20
4.2.4. Optymalizacja położenia czwartego tłumika drgań	20
4.2.5. Optymalizacja położenia pozostałych tłumików drgań	21
4.2.6. Porównanie krzywych rezonansowych	25
4.3. Wynik optymalizacji	25
4.4. Rozkład przestrzenny amplitud drgań	25
4.5. Zmiana charakterystyk dynamicznych ramy spowodowana tłumikami drgań	28
5. Uwagi końcowe	29



1. Wprowadzenie.

1.1. Cel opracowania

W niniejszym opracowaniu opisano wyniki analizy dynamicznej konstrukcji ramowej z tłumikami poddanej obciążeniu wywołanym przez trzęsienie ziemi. Analiza polegała na określeniu charakterystyk dynamicznych układu i optymalnym rozmieszczeniu tłumików drgań. Rama składa się z ośmiu kondygnacji. Na ramie rozmieszczono osiem tłumików drgań.

1.2. Znaczenie tłumików drgań

Tłumiki drgań są elementami konstrukcji, które pochłaniają część energii drgań ramy zmniejszając tym samym amplitudy drgań konstrukcji wywołane siłami dynamicznymi. Zastosowanie tych urządzeń jest uzasadnione różnymi potrzebami. Przykładowo tłumiki drgań stosuje się po to by:

- zredukować drgania wywołane trzęsieniami ziemi,
- zwiększyć komfort użytkowników wysokich budynków podatnych na wzbudzenia wywołane działaniem wiatru,
- zwiększyć komfort użytkownika mostów lub kładek dla pieszych,
- zwiększyć czas użytkowania konstrukcji ze względu na zmęczenie materiału konstrukcji,
- zredukować lub wyeliminować drgania generowane przez wzbudzenie wirowe (np. w przypadku kominów stalowych)

2. Omówienie sposobu rozwiązywania problemu

2.1. Równania ruchu ramy z i bez tłumików drgań

2.1.1. Równanie ruchu ramy bez tłumików

Opis macierzy mas, sztywności oraz tłumienia poszczególnych elementów jest wstępem do analizy konstrukcji jako całości. Aby można było traktować poszczególne elementy jako jedną konstrukcję należy je ze sobą w odpowiedni sposób połączyć i napisać równania ruchu całej konstrukcji.

W pierwszym etapie zapisuje się równanie ruchu układu ramowego bez tłumików. Do elementów układu ramowego nie zalicza się zastrzałów podtrzymujących tłumiki. Zastrzały traktuje się jako elementy tłumików. Globalne równanie ruchu konstrukcji bez tłumików drgań ma postać :

$$\underline{M}_k \ddot{\underline{q}}_k(t) + \underline{C}_k \dot{\underline{q}}_k(t) + \underline{K}_k \underline{q}_k(t) = \underline{P}_k(t), \quad (1)$$

w którym macierze $\underline{M}_k, \underline{C}_k, \underline{K}_k$ to odpowiednio macierze mas, tłumienia i sztywności ramy, a wektory $\ddot{\underline{q}}_k, \dot{\underline{q}}_k, \underline{q}_k$ to odpowiednio wektory przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń konstrukcji. Wektor $\underline{P}_k(t)$ jest wektorem sił wymuszających.

Macierz tłumienia konstrukcji \underline{C}_k jest macierzą tłumienia proporcjonalnego. Ma ona postać:

$$\underline{C}_k = \alpha \underline{M}_k + \beta \underline{K}_k. \quad (2)$$

Współczynniki proporcjonalności α oraz β wyznacza się z układu równań:



$$\frac{\alpha}{\omega_1} + \beta\omega_1 = 2\gamma_1, \quad \frac{\alpha}{\omega_2} + \beta\omega_2 = 2\gamma_2. \quad (3)$$

W równaniach (3) wielkości oznaczone symbolami γ_1 i γ_2 oznaczają bezwymiarowe współczynniki tłumienia modalnego, a ω_1 i ω_2 są dwoma pierwszymi częstotliwościami drgań własnych, nietłumionych ramy. Aby wyznaczyć te częstotliwości drgań należy rozwiązać problem własny postaci:

$$\left(\underline{K}_k - \omega^2 \underline{M}_k \right) \underline{a} = \underline{0}. \quad (4)$$

Znając ω_1 i ω_2 można rozwiązać układ równań i wyznaczyć wartości α i β . W rezultacie otrzymuje się:

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \beta = \frac{2(\gamma_2\omega_2 - \gamma_1\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (5)$$

2.1.2. Równanie ruchu ramy z tłumikami

Równanie ruchu układu z zainstalowanymi tłumikami ma następującą postać:

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}\underline{q}(t) = \underline{P}(t). \quad (6)$$

W tym równaniu wektor \underline{q} zawiera wszystkie stopnie swobody tak konstrukcji jak i elementów tłumiących. Macierze \underline{M} , \underline{C} , \underline{K} należy rozumieć jako macierze opisujące konstrukcję z tłumikami. Procedura generowania macierzy mas \underline{M} , sztywności \underline{K} i tłumienia \underline{C} oraz wektora $\underline{P}(t)$ jest taka sama jak w przypadku równania ruchu dla ramy bez tłumików z tym, że wymiary macierzy i wektorów są większe.

2.2. Wpływ trzęsienia ziemi na konstrukcję

Trzęsienie ziemi i związany z nim ruch podpór ramy jest tzw. wymuszeniem kinematycznym. Zakłada się, że znane jest przyspieszenie poziome podpór ramy (przyspieszenie jest równoległe do osi x układu globalnego). Zostało to zilustrowane na rys. 1.

Całkowite przemieszczenia węzłowe, prędkości i przyspieszenia ramy poddanej temu wymuszeniu można zapisać w postaci:

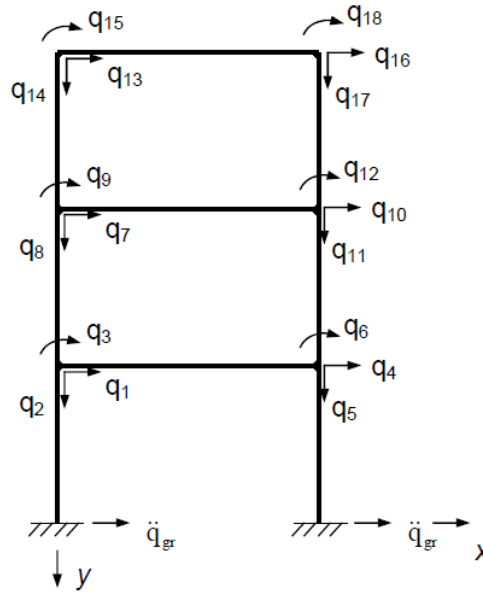
$$\underline{q}_c = \underline{q} + \underline{q}_w, \quad \dot{\underline{q}}_c = \dot{\underline{q}} + \dot{\underline{q}}_w, \quad \ddot{\underline{q}}_c = \ddot{\underline{q}} + \ddot{\underline{q}}_w, \quad (7)$$

gdzie wektor $\ddot{\underline{q}}_w$ ma postać:

$$\underline{q}_w = \underline{i}\ddot{q}_{gr}(t). \quad (8)$$

Wielkość $\ddot{q}_{gr}(t)$ jest znanym przyspieszeniem gruntu w poziomie podpór. Zakłada się również, że wymuszenie kinematyczne spowodowane trzęsieniem ziemi powoduje powstanie wyłącznie poziomych sił wymuszających. Stąd też wektor \underline{i} określa się jako wektor określający kierunki przemieszczeń, po których będą działały wyżej opisane siły. Dla ramy pokazanej na rys. 1 wektor \underline{i} ma postać:

$$\underline{i} = \text{col}(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0). \quad (9)$$



Rys. 1

W wektorze tym jedyne oznaczają kierunki przemieszczeń poziomych, natomiast zera pozostałe przemieszczenia węzłowe. W analogiczny sposób można określić wektor \underline{i} dla ram składających się z większej ilości elementów skończonych.

Wektor obciążeń zewnętrznych w układzie globalnym oblicza się ze wzoru:

$$\underline{P}(t) = \underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) = \underline{M} \underline{i} \ddot{q}_{gr}(t). \quad (10)$$

2.3. Charakterystyki dynamiczne ram z tłumikami

Charakterystyki dynamiczne układu bez zainstalowanych tłumików drgań (częstości oraz postaci drgań własnych nietłumionych) można wyznaczyć rozwiązując problem własny o postaci:

$$\left(\underline{K}_k - \omega^2 \underline{M}_k \right) \underline{a} = \underline{0}. \quad (11)$$

W przypadku układu z wbudowanymi tłumikami drgań problem jest znacznie bardziej złożony. Wówczas, w celu prostszego opisu problemu można posłużyć się równaniem ruchu zapisanym za pomocą zmiennych stanu.

Równanie ruchu

$$\underline{M}_k \ddot{\underline{q}}_k(t) + \underline{C}_k \dot{\underline{q}}_k(t) + \underline{K}_k \underline{q}_k(t) = \underline{P}_k(t), \quad (12)$$

zapisuje się w postaci blokowej:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{ss} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{q}}_s \\ \ddot{\underline{q}}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C}_{ss} & \underline{C}_{sd} \\ \underline{C}_{ds} & \underline{C}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{q}}_s \\ \dot{\underline{q}}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_{ss} & \underline{K}_{sd} \\ \underline{K}_{ds} & \underline{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{q}_s \\ \underline{q}_d \end{Bmatrix} = \underline{0}, \quad (13)$$

lub w rozwiniętej postaci:

$$\begin{aligned} \underline{M}_{ss} \ddot{\underline{q}}_s + \underline{C}_{ss} \dot{\underline{q}}_s + \underline{C}_{sd} \dot{\underline{q}}_d + \underline{K}_{ss} \underline{q}_s + \underline{K}_{sd} \underline{q}_d &= \underline{0} \\ \underline{C}_{ds} \dot{\underline{q}}_s + \underline{C}_{dd} \dot{\underline{q}}_d + \underline{K}_{ds} \underline{q}_s + \underline{K}_{dd} \underline{q}_d &= \underline{0} \end{aligned} \quad (14)$$

Do powyższych równań dołącza się jedno dodatkowe równanie o postaci:

$$\underline{M}_{ss} \underline{\dot{q}}_s - \underline{M}_{ss} \underline{\dot{q}}_s = \underline{0} . \quad (15)$$

W równaniach (14) symbolami \underline{q}_s , \underline{q}_d oznaczono odpowiednio wektor przemieszczeń węzłów i wektor tzw. przemieszczeń wewnętrznych tłumików. Przemieszczenia wewnętrzne tłumików zostaną omówione w dalszej części pracy.

Równania (14) i (15) zapisuje się w postaci:

$$\begin{aligned} \underline{M}_{ss} \underline{\ddot{q}}_s + \underline{0} \underline{\ddot{q}}_d + \underline{0} \underline{\dot{q}}_s + \underline{0} \underline{\dot{q}}_d - \underline{M}_{ss} \underline{\ddot{q}}_s + \underline{0} \underline{\dot{q}}_d &= \underline{0} \\ \underline{C}_{ds} \underline{\dot{q}}_s + \underline{M}_{ss} \underline{\ddot{q}}_s + \underline{C}_{dd} \underline{\dot{q}}_d + \underline{K}_{ds} \underline{q}_s + \underline{K}_{dd} \underline{q}_d &= \underline{0} , \\ \underline{C}_{ds} \underline{\dot{q}}_s + \underline{0} \underline{\ddot{q}}_s + \underline{C}_{dd} \underline{\dot{q}}_d + \underline{0} \underline{\dot{q}}_d + \underline{K}_{ds} \underline{q}_s + \underline{0} \underline{\dot{q}}_s + \underline{K}_{dd} \underline{q}_d &= \underline{0} \end{aligned} \quad (16)$$

Wprowadza się wektor stanu zdefiniowany w następujący sposób $\underline{x} = \text{col}(\underline{q}_s, \underline{\dot{q}}_s, \underline{q}_d)$. Pochodną wektora stanu jest wektor $\underline{\dot{x}} = \text{col}(\underline{\dot{q}}_s, \underline{\ddot{q}}_s, \underline{\dot{q}}_d)$.

Układ równań (16) można teraz zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$\underline{A} \underline{\dot{x}} + \underline{B} \underline{x} = \underline{0} , \quad (17)$$

gdzie:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{C}_{ss} & \underline{M}_{ss} & \underline{C}_{sd} \\ \underline{M}_{ss} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{C}_{ds} & \underline{0} & \underline{C}_{dd} \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ss} & \underline{0} & \underline{K}_{sd} \\ \underline{0} & -\underline{M}_{ss} & \underline{0} \\ \underline{C}_{ds} & \underline{0} & \underline{K}_{dd} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Macierze \underline{A} i \underline{B} są macierzami symetrycznymi, a ponadto macierz \underline{B} jest nieosobliwa, jeżeli tylko macierz mas konstrukcji \underline{M}_{ss} jest nieosobliwa.

Rozwiązanie równania (17) przyjmuje się o postaci:

$$\underline{x}(t) = \underline{a} \exp(st), \quad \underline{\dot{x}} = s \underline{a} \exp(st) . \quad (19)$$

Po podstawieniu (19) do równania (17) otrzymuje się liniowy problem własny o postaci:

$$(s \underline{A} + \underline{B}) \underline{a} = \underline{0} . \quad (20)$$

W dalszym ciągu wielkości oznaczone symbolem s_j oznaczać będą wartości własne problemu (20) natomiast symbol \underline{a}_j oznaczać będzie wektor własny stowarzyszony z wartością własną s_j , ($j = 1, 2, \dots, 2n$).

Znając wartość własną $s_j = a_j + i b_j$, gdzie $i = \sqrt{-1}$ jest jednostką urojoną, można obliczyć częstotliwość drgań ω_j korzystając ze wzoru:

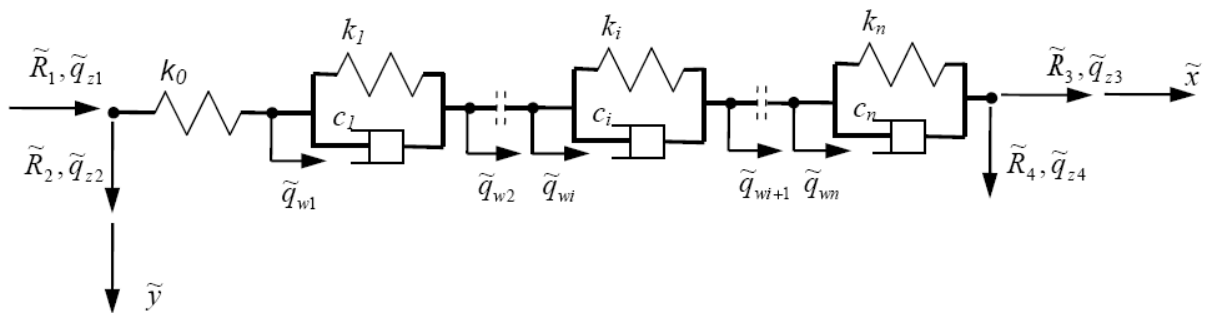
$$\omega_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2} . \quad (21)$$

Bezwymiarowe współczynniki tłumienia modalnego γ_j wyznacza się ze wzoru:

$$\gamma_j = -\frac{a_j}{\omega_j} \quad (22)$$

2.4. Opis tłumików – uogólniony model reologiczny Kelvina

Uogólniony model Kelvina jest modelem złożonym, składającym się z kilku elementów podstawowych. Najprostszy uogólniony model składa się z elementu sprężystego i połączonego z nim szeregowo prostego elementu Kelvina. Natomiast prosty element Kelvina składa się z równolegle połączonej sprężyny i tłumika. Bardziej rozbudowane formy uogólnionego modelu Kelvina otrzymuje się przez szeregowe połączenie sprężyny i kilku prostych elementów Kelvina. Schemat uogólnionego modelu Kelvina przedstawia rys. 2:



Rys. 2 Schemat uogólnionego modelu Kelvina

2.4.1. Opis elementów składowych uogólnionego modelu Kelvina:

Tłumik oraz sprężyna są elementami bardzo przypominającymi element kratowy. Mają tyle samo parametrów węzłowych. W przeciwieństwie do elementu kratowego nie posiadają one masy i nie jest generowana dla tych elementów macierz mas. Natomiast bardzo ważnymi parametrami charakteryzującymi je są: sztywność sprężyny k , dla elementu typu sprężyna oraz współczynnik tłumienia c , dla elementu typu tłumik.

Macierz sztywności sprężyny i macierz tłumienia tłumika w układzie lokalnym mają postać:

$$\underline{\tilde{K}}_e = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

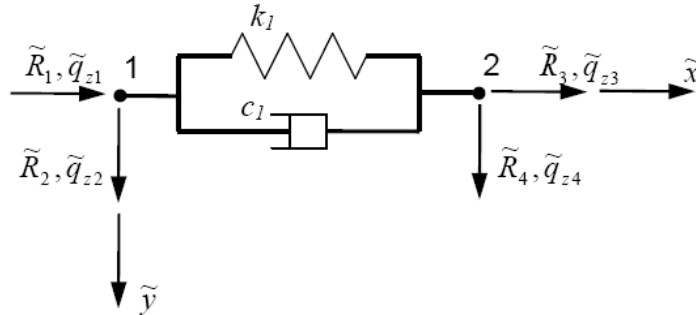
$$\underline{\tilde{C}}_e = c \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Równania ruchu tych elementów zapisane w układzie lokalnym mają postaci:

$$\underline{\tilde{R}}_e = \underline{\tilde{K}}_e \underline{\tilde{q}}_e, \quad \underline{\tilde{R}}_e = \underline{\tilde{C}}_e \dot{\underline{\tilde{q}}}_e, \quad (25)$$

2.4.2. Opis prostego elementu Kelvina

Kolejnym elementem jest prosty element Kelvina. Zbudowany jest on z równoległe połączonej sprężyny i tłumika, tak jak to pokazano na rys. 3.



Rys. 3 Schemat prostego elementu Kelvina

Prosty element Kelvina charakteryzuje się czterema parametrami węzłowymi. Siłę przenoszoną przez element Kelvina - Voigta można przedstawić za pomocą wzoru:

$$u(t) = u_s(t) + u_t(t) . \quad (26)$$

Siła w sprężynie jest opisana równaniem:

$$u_s(t) = k_1 (\tilde{q}_{z3} - \tilde{q}_{z1}) . \quad (27)$$

Natomiast siłę w tłumiku wyznacza się z zależności:

$$u_t(t) = c_1 (\dot{\tilde{q}}_{z3} - \dot{\tilde{q}}_{z1}) . \quad (28)$$

Wektor przemieszczeń węzłowych i wektor sił przywęzłowych są określone w następująco:

$$\underline{\tilde{q}}_z = \text{col} \{ \tilde{q}_{z1}, \tilde{q}_{z2}, \tilde{q}_{z3}, \tilde{q}_{z4} \} , \quad \underline{\tilde{R}}_z = \text{col} \{ \tilde{R}_{z1}, \tilde{R}_{z2}, \tilde{R}_{z3}, \tilde{R}_{z4} \} . \quad (29)$$

Równania równowagi węzłów 1 i 2 mają postać:

$$\tilde{R}_1(t) = -u(t) = -k_1 (\tilde{q}_{w1} - \tilde{q}_{z1}) - c_1 (\dot{\tilde{q}}_{z3} - \dot{\tilde{q}}_{z1}) , \quad (30)$$

$$\tilde{R}_2(t) = 0 , \quad (31)$$

$$\tilde{R}_3(t) = u(t) = k_1 (\tilde{q}_{w1} - \tilde{q}_{z1}) + c_1 (\dot{\tilde{q}}_{z3} - \dot{\tilde{q}}_{w1}) , \quad (32)$$

$$\tilde{R}_4(t) = 0 . \quad (33)$$

Zapisując je w postaci macierzowej otrzymuje się następujące równanie ruchu:

$$\underline{\tilde{R}}_z = \underline{\tilde{K}}_{zz} \underline{\tilde{q}}_z + \underline{\tilde{C}}_{zz} \dot{\underline{\tilde{q}}}_z \equiv \underline{\tilde{R}}_e = \underline{\tilde{K}}_e \underline{\tilde{q}}_e + \underline{\tilde{C}}_e \dot{\underline{\tilde{q}}}_e , \quad (34)$$

podane w układzie lokalnym, gdzie:

$$\underline{\tilde{K}}_{zz} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} , \quad \underline{\tilde{C}}_{zz} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} , \quad (35)$$

Transformacja macierzy sztywności i tłumienia z układu lokalnego do globalnego odbywa się według zależności:

$$\underline{K}_e = \underline{T}_e^T \tilde{\underline{K}}_e \underline{T}_e, \underline{C}_e = \underline{C}_e^T \tilde{\underline{C}}_e \underline{T}_e. \quad (36)$$

Jawne postaci macierzy sztywności \underline{K}_e i tłumienia \underline{C}_e są następujące:

$$\underline{K}_e = \begin{bmatrix} c^2 k_1 & csk_1 & -c^2 k_1 & -csk_1 \\ csk_1 & s^2 k_1 & -csk_1 & -s^2 k_1 \\ -c^2 k_1 & -csk_1 & c^2 k_1 & csk_1 \\ -csk_1 & -s^2 k_1 & csk_1 & s^2 k_1 \end{bmatrix}, \underline{C}_e = \begin{bmatrix} c^2 c_1 & csc_1 & -c^2 c_1 & -csc_1 \\ csc_1 & s^2 c_1 & -csc_1 & -s^2 c_1 \\ -c^2 c_1 & -csc_1 & c^2 c_1 & csc_1 \\ -csc_1 & -s^2 c_1 & csc_1 & s^2 c_1 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

gdzie: $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$.

2.4.3. Opis uogólnionego modelu Kelvina

Rozpatruje się uogólniony model Kelvina składający się z równolegle połączonych sprężyny i n prostych elementów Kelvina (porównaj rys.2). Siła działająca w rozpatrywanym modelu jest stała tzn.:

$$u(t) = u_0(t) = \dots = u_i(t) = \dots = u_n(t). \quad (38)$$

Zachodzą tutaj następujące zależności:

- siła w sprężynie

$$u_0(t) = k_0 (\tilde{q}_{w1} - \tilde{q}_{z1}), \quad (39)$$

Gdzie symbol \tilde{q}_w oznacza przemieszczenie wewnętrzne pokazane na rys 2.

- siła w pierwszym prostym elemencie Kelvina

$$u_1(t) = k_1 (\tilde{q}_{w2} - \tilde{q}_{w1}) + c_1 (\dot{\tilde{q}}_{w2} - \dot{\tilde{q}}_{w1}), \quad (40)$$

- siła w i-tym prostym elemencie Kelvina (i=1,2,3...n)

$$u_i(t) = k_1 (\tilde{q}_{wi+1} - \tilde{q}_{wi}) + c_1 (\dot{\tilde{q}}_{wi+1} - \dot{\tilde{q}}_{wi}), \quad (41)$$

- siła w n-tym prostym elemencie Kelvina

$$u_n(t) = k_n (\tilde{q}_{z3} - \tilde{q}_{wn}) + c_n (\dot{\tilde{q}}_{z3} - \dot{\tilde{q}}_{wn}). \quad (42)$$

Równania równowagi węzłów zewnętrznych mają następującą postać:

$$\tilde{R}_1(t) = -u_0(t) = -k_0 (\tilde{q}_{w1} - \tilde{q}_{z1}), \quad (43)$$

$$\tilde{R}_2(t) = 0, \quad (44)$$

$$\tilde{R}_3(t) = u_n(t) = k_n (\tilde{q}_{z3} - \tilde{q}_{wn}) + c_n (\dot{\tilde{q}}_{z3} - \dot{\tilde{q}}_{wn}), \quad (45)$$

$$\tilde{R}_4(t) = 0. \quad (46)$$

Równania równowagi węzłów wewnętrznych są następujące:

Węzeł 1)

$$u_0(t) - u_1(t) = 0, \quad (47)$$

$$k_0 (\tilde{q}_{w1} - \tilde{q}_{z1}) - k_1 (\tilde{q}_{w2} - \tilde{q}_{w1}) - c_1 (\dot{\tilde{q}}_{w2} - \dot{\tilde{q}}_{w1}) = 0, \quad (48)$$

Węzeł 2)

$$u_1(t) - u_2(t) = 0, \quad (49)$$

$$k_1 (\tilde{q}_{w2} - \tilde{q}_{w1}) + c_1 (\dot{\tilde{q}}_{w2} - \dot{\tilde{q}}_{w1}) - k_2 (\tilde{q}_{w3} - \tilde{q}_{w2}) - c_2 (\dot{\tilde{q}}_{w3} - \dot{\tilde{q}}_{w2}) = 0 , \quad (50)$$

Węzeł „i”)

$$u_{i-1}(t) - u_i(t) = 0 , \quad (51)$$

$$k_{i-1} (\tilde{q}_{wi} - \tilde{q}_{wi-1}) + c_{i-1} (\dot{\tilde{q}}_{wi} - \dot{\tilde{q}}_{wi-1}) - k_i (\tilde{q}_{wi+1} - \tilde{q}_{wi}) - c_i (\dot{\tilde{q}}_{wi+1} - \dot{\tilde{q}}_{wi}) = 0 , \quad (52)$$

Węzeł „n”)

$$u_{n-1}(t) - u_n(t) = 0 , \quad (53)$$

$$k_{n-1} (\tilde{q}_{wn} - \tilde{q}_{wn-1}) + c_{n-1} (\dot{\tilde{q}}_{wn} - \dot{\tilde{q}}_{wn-1}) - k_n (\tilde{q}_{wn+1} - \tilde{q}_{wn}) - c_n (\dot{\tilde{q}}_{wn+1} - \dot{\tilde{q}}_{wn}) = 0 . \quad (54)$$

W zapisie macierzowym równania równowagi węzłów zewnętrznych można przedstawić w postaci:

$$\tilde{\underline{R}}_z = \tilde{\underline{K}}_{zz} \tilde{\underline{q}}_z + \tilde{\underline{K}}_{zw} \tilde{\underline{q}}_w + \tilde{\underline{C}}_{zz} \dot{\tilde{\underline{q}}}_z + \tilde{\underline{C}}_{zw} \dot{\tilde{\underline{q}}}_w , \quad (55)$$

w którym:

$$\tilde{\underline{K}}_{zz} = \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} , \quad \tilde{\underline{K}}_{zw} = \begin{bmatrix} -k_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{4 \times n} ,$$

$$\tilde{\underline{C}}_{zz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} , \quad \tilde{\underline{C}}_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -c_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{4 \times n} , \quad (56)$$

W zapisie macierzowym równania równowagi węzłów wewnętrznych mają postać:

$$\tilde{\underline{K}}_{wz} \tilde{\underline{q}}_z + \tilde{\underline{K}}_{ww} \tilde{\underline{q}}_w + \tilde{\underline{C}}_{wz} \dot{\tilde{\underline{q}}}_z + \tilde{\underline{C}}_{ww} \dot{\tilde{\underline{q}}}_w = \underline{0} , \quad (57)$$

gdzie:

$$\tilde{\underline{K}}_{ww} = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{i-1} & k_{i-1} + k_i & -k_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n \end{bmatrix} , \quad (58)$$

$$\tilde{\underline{C}}_{ww} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{i-1} & c_{i-1} + c_i & -c_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{n-1} & c_{n-1} + c_n \end{bmatrix} . \quad (59)$$

Macierz transformacji z układu lokalnego do globalnego ma postać:

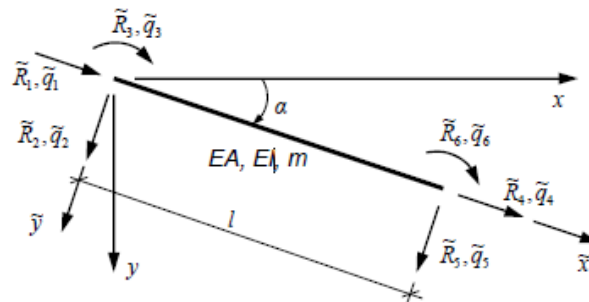
$$\underline{T}^e = \begin{bmatrix} \underline{T}_{ze4 \times 4} & \underline{0}_{4 \times n} \\ \underline{0}_{n \times 4} & \underline{I}_{n \times n} \end{bmatrix}_{(n+4) \times (n+4)} \quad (60)$$

2.5. Opis elementów skończonych użytych do modelowania ramy

2.5.1. Opis elementu prętowego

Element prętowy został on pokazany na rys. 4. Wielkościami charakteryzującymi element są: długość pręta l , sztywność na rozciąganie/ściskanie EA , sztywność na zginanie EI i masa jednostkowa m .

Każdy element tego typu jest opisany za pomocą sześciu sił przywęzłowych oraz sześciu przemieszczeń węzłowych. Są to siły i przemieszczenia elementu w kierunku normalnym do jego osi podłużnej, w kierunku prostopadłym do osi oraz kąty obrotu i momenty zginające w węzłach. Kierunki oraz zwroty tych wielkości są zgodne z osiami lokalnego układu współrzędnych (\tilde{x}, \tilde{y}) . Układ ma swój początek w lewym węźle elementu, a jego osie pokrywają się z głównymi osiami elementu w taki sposób, że oś \tilde{x} pokrywa się z osią obojętną pręta, a oś \tilde{y} jest do niej prostopadła. Siły przywęzłowe oraz przemieszczenia węzłowe można przedstawić w postaci wektorów:



Rys. 4

$$\underline{\tilde{R}}_e = \text{col}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \dots, \tilde{R}_6) \quad , \quad \underline{\tilde{q}}_e = \text{col}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_6) \quad , \quad (61)$$

gdzie $\underline{\tilde{R}}_e$ jest wektorem sił przywęzłowych, a $\underline{\tilde{q}}_e$ wektorem przemieszczeń węzłowych. Dla elementu prętowego można zapisać równanie ruchu w postaci:

$$\underline{\tilde{R}}_e = \underline{\tilde{K}}_e \underline{\tilde{q}}_e + \underline{\tilde{M}}_e \underline{\tilde{q}}_e \quad . \quad (62)$$

We wzorze (62) $\underline{\tilde{K}}_e$ oznacza macierz sztywności elementu w układzie lokalnym, a $\underline{\tilde{M}}_e$ macierz mas. Jeżeli wartości parametrów charakteryzujących pręt są stałe na długości to macierze te mają postać:

$$\underline{\tilde{M}}_e = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & 13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad , \quad (63)$$



$$\tilde{\underline{K}}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{l^3} & 6\frac{EJ}{l^2} & 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & 6\frac{EJ}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{l^2} & 4\frac{EJ}{l} & 0 & -6\frac{EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & -6\frac{EJ}{l} & 0 & 12\frac{EJ}{l^3} & -6\frac{EJ}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} & 0 & -6\frac{EJ}{l^2} & 4\frac{EJ}{l} \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Równanie ruchu elementu należy także napisać w układzie globalnym. Położenie układu lokalnego względem układu globalnego opisuje kąt α mierzony zgodnie ze skrętnością układu od osi x układu globalnego do osi \tilde{x} układu lokalnego. Zapisując wektor sił przywęzłowych i przemieszczeń węzłowych w układzie globalnym w postaci:

$$\underline{R}_e = \text{col}(\underline{R}_1, \underline{R}_2, \dots, \underline{R}_6), \quad \underline{q}_e = \text{col}(\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_6), \quad (65)$$

oraz korzystając z warunku równoważności sił przywęzłowych w układzie lokalnym i globalnym:

$$\tilde{\underline{R}}_e = \underline{T}_e \underline{R}_e, \quad (66)$$

można napisać, że macierz transformacji rozpatrywanego pręta ma postać:

$$\underline{T}_e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Relacja odwrotna do zależności (66) ma postać:

$$\underline{R}_e = \underline{T}_e^T \tilde{\underline{R}}_e. \quad (68)$$

Według tej samej zależności jest transponowany wektor przemieszczeń węzłowych:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{q}}_e &= \underline{T}_e \underline{q}_e \\ \underline{q}_e &= \underline{T}_e^T \tilde{\underline{q}}_e \end{aligned} \quad (69)$$

Podstawiając zależność (66) oraz (69) do równania ruchu elementu otrzymamy:

$$\underline{T}_e \underline{R}_e = \tilde{\underline{K}}_e \underline{T}_e \underline{q}_e + \tilde{\underline{M}}_e \underline{T}_e \underline{q}_e. \quad (70)$$

Mnożąc lewostronnie równanie (70) przez $\tilde{\underline{T}}_e^T$:

$$\tilde{\underline{T}}_e^T \underline{T}_e \underline{R}_e = \tilde{\underline{T}}_e^T \tilde{\underline{K}}_e \underline{T}_e \underline{q}_e + \tilde{\underline{T}}_e^T \tilde{\underline{M}}_e \underline{T}_e \underline{q}_e, \quad (71)$$

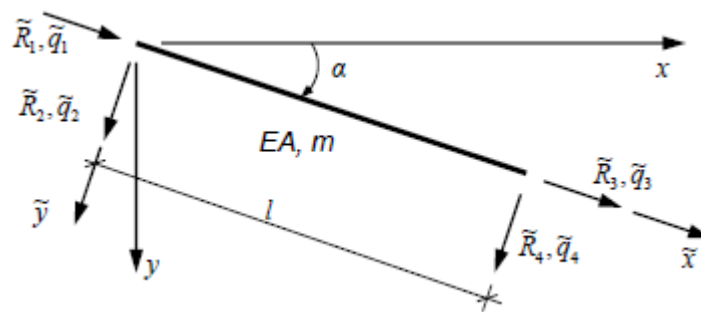
otrzyma się równanie ruchu elementu w układzie globalnym:

$$\underline{R}_e = \underline{K}_e \underline{q}_e + \underline{M}_e \ddot{\underline{q}}_e, \quad (72)$$

gdzie $\underline{K}_e = \underline{T}_e^T \tilde{\underline{K}}_e \underline{T}_e$, $\underline{M}_e = \underline{T}_e^T \tilde{\underline{M}}_e \underline{T}_e$ są odpowiednio macierzami sztywności i mas elementu prętowego.

2.5.2. Opis elementu kratowego

Do opisu elementu kratowego można się posłużyć takimi samymi zależnościami co dla elementu prętowego. Należy tylko na nowo zdefiniować macierze i wektory dla tego elementu. Schemat elementu kratowego przedstawia rys. 5.



Rys. 5

Ze względu na mniejszą liczbę parametrów węzłowych (występują tu wyłącznie przemieszczenia w kierunku równoległym i prostopadłym do osi elementu) oraz charakter pracy elementu kratowego macierze sztywności i mas mają postaci:

$$\tilde{\underline{K}}_e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{M}}_e = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (73)$$

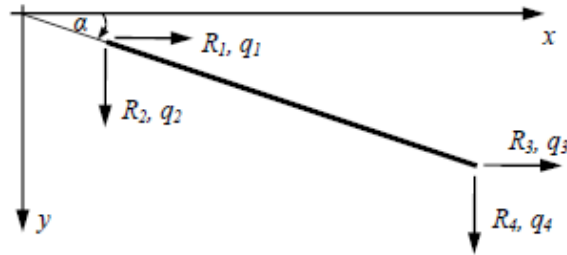
Definicje wektorów sił przywęzłowych i przemieszczeń węzłowych w układzie lokalnym i globalnym są następujące (porównaj rys. 6):

$$\tilde{\underline{R}}_e = \text{col}(\tilde{\underline{R}}_1, \tilde{\underline{R}}_2, \dots, \tilde{\underline{R}}_4), \quad \tilde{\underline{q}}_e = \text{col}(\tilde{\underline{q}}_1, \tilde{\underline{q}}_2, \dots, \tilde{\underline{q}}_4), \quad (74)$$

$$\underline{R}_e = \text{col}(\underline{R}_1, \underline{R}_2, \dots, \underline{R}_4), \quad \underline{q}_e = \text{col}(\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_4). \quad (75)$$

Macierz transformacji elementu kratowego ma postać:

$$\underline{T}_e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (76)$$



Rys. 6

2.6. Krzywe rezonansowe

Wykres przedstawiający amplitudy drgań wymuszonych ustalonych dowolnego węzła konstrukcji w zależności od częstości wymuszenia nazywa się krzywą rezonansową. Krzywą rezonansową można wyznaczyć używając m.in. zmiennych zespolonych. Wówczas wektor sił wymuszających opisuje się za pomocą funkcji:

$$\underline{P}(t) = P_0 \exp(i\lambda t) , \quad (77)$$

gdzie: $i = \sqrt{-1}$ jest jednostką urojoną, a \underline{P}_0 jest wektorem amplitud wymuszenia. Dla wymuszenia kinematycznego wektor \underline{P}_0 przyjmuje następującą postać:

$$\underline{P}_0 = \underline{M} \ddot{\underline{q}}_0 , \quad (78)$$

gdzie $\ddot{\underline{q}}_0$ jest amplitudą przyspieszenia.

Po podstawieniu zależności (78) do równania ruchu (6) otrzyma się:

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{q}}(t) + \underline{K} \underline{q}(t) = \underline{P}_0 \exp(i\lambda t) , \quad (79)$$

Rozwiązaniem równania (78) opisującym drgania ustalone konstrukcji jest:

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0 \exp(i\lambda t), \quad \dot{\underline{q}}(t) = \dot{\underline{q}}_0 \exp(i\lambda t), \quad \ddot{\underline{q}}(t) = \ddot{\underline{q}}_0 \exp(i\lambda t), \quad (80)$$

Po podstawieniu powyższych zależności do równania ruchu (79) otrzymuje się równanie:

$$\left(\underline{K} + i\lambda \underline{C} - \lambda^2 \underline{M} \right) \underline{q}_0 = \underline{P}_0 . \quad (81)$$

Macierz $\underline{K} + i\lambda \underline{C} - \lambda^2 \underline{M}$ jest nazywana macierzą sztywności dynamicznej.

Wykonując analogiczne wyprowadzenie dla liczb rzeczywistych przyjmuje się, że wektor sił wymuszających ma postać:

$$\underline{P}(t) = \underline{P}_0 \cos \lambda t , \quad (82)$$

a drgania ustalone opisują funkcje:

$$\begin{aligned} \underline{q}(t) &= \underline{q}_c \cos \lambda t + \underline{q}_s \sin \lambda t \\ \dot{\underline{q}}(t) &= -\lambda \dot{\underline{q}}_c \cos \lambda t + \lambda \dot{\underline{q}}_s \sin \lambda t , \\ \ddot{\underline{q}}(t) &= -\lambda^2 \ddot{\underline{q}}_c \cos \lambda t + \lambda^2 \ddot{\underline{q}}_s \sin \lambda t \end{aligned} \quad (83)$$

po podstawieniu do równania ruchu (6) otrzymuje się układ równań algebraicznych o postaci:

$$\begin{cases} (\underline{K} - \lambda^2 \underline{M}) \underline{q}_c + \lambda \underline{C} \underline{q}_s = \underline{P}_c \\ -\lambda \underline{C} \underline{q}_c + (\underline{K} - \lambda^2 \underline{M}) \underline{q}_s = \underline{0} \end{cases} \quad (84)$$

z którego można wyznaczyć wektory \underline{q}_c i \underline{q}_s .

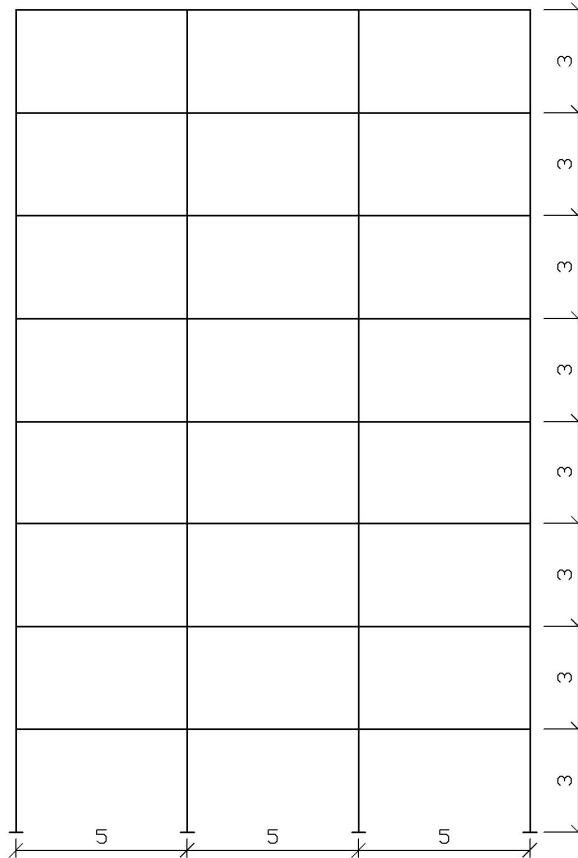
Dla zadanej częstości wymuszenia λ_i wyznacza się amplitudy drgań ze wzoru $a_i = \sqrt{q_{ci}^2 + q_{si}^2}$.

Na podstawie obliczeń wykonanych dla różnych częstości wymuszenia λ_i można sporządzić wykres krzywej rezonansowej.

3. Opis analizowanej ramy

3.1. Omówienie danych przyjętych do obliczeń

Obliczenia dotyczą ośmiokondygnacyjnej ramy żelbetowej pokazanej na rys. 8, obciążonej siłami wywołanymi trzęsieniem ziemi. W tabeli 1 podano wymiary przekroji poprzecznych elementów ramy. Rama wykonana jest z żelbetu, moduł Younga betonu $E = 31 \text{ GPa}$.



Rys. 8 Schemat analizowanej ramy

Informacje o zastrzałach łączących tłumiki z ramą:

- zastrzały są wykonane z kształtownika HEB200,
- parametry zastrzałów są następujące:
 - moduł Younga dla stali $E = 205 \text{ GPa}$
 - sztywność przekroju na rozciąganie/ściskanie $EA = 0,160105E+10 \text{ N}$
 - sztywność przekroju na zginanie $EI = 0,116850E+08 \text{ Nm}^2$

- masa jednostkowa $m = 61,3 \text{ kg/m}$
- długość elementu $l = 3.905 \text{ m}$

Tabela 1 - Wymiary elementów

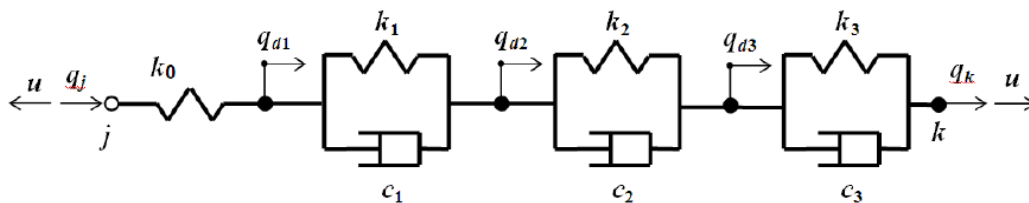
Nr kondygnacji	Słupy zewnętrzne [cm]	Słupy wewnętrzne [cm]	Belki [cm]
7, 8	35 x 35	40 x 40	30 x 40
5, 6	40 x 40	45 x 45	30 x 45
3, 4	45 x 45	53 x 53	30 x 50
1, 2	50 x 50	60 x 60	30 x 50

Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia ramy wynoszą $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0,02$.

Do obliczeń przyjęto 7 parametrowy model tłumika pokazany na rys. 9. Wartości parametrów tego modelu podano w tabeli 2.

Tabela 2 – Parametry modelu tłumika

Współczynniki sztywności ($\times 10^6$) [N / m]		Współczynniki tłumienia ($\times 10^6$) [Ns / m]	
k_0	115,300	---	---
k_1	36,710	c_1	5,458
k_2	12,320	c_2	12,380
k_3	1,109	c_3	17,350



Rys. 9 Schemat 7 parametrowego tłumika Kelvina

3.2. Schemat statyczny ramy

W trakcie obliczeń korzystano z następujących założeń:

- konstrukcję budynku można traktować jako szereg równoległych do siebie ram płaskich obciążonych w płaszczyźnie ramy
- siły osiowe w słupach nie mają wpływu na odkształcenia ramy
- obciążeniem ramy są siły poziome (statyczne lub dynamiczne) przyłożone na wysokości stropów lub poziome osiadania podpór ramy (w przypadku trzęsienia ziemi lub dynamicznych obciążeń paraszmicznych)

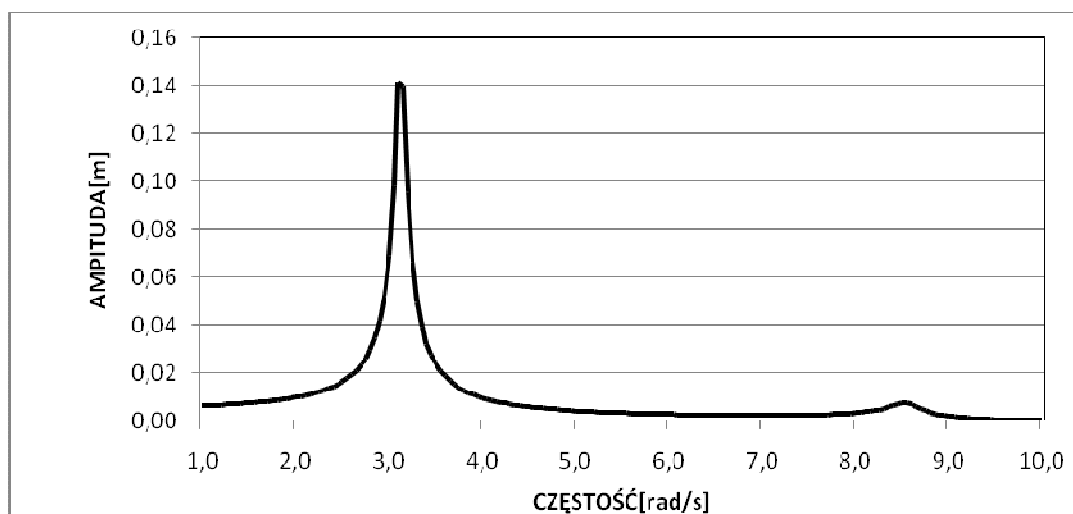
Zgodnie z powyższymi założeniami analiza konstrukcji sprowadziła się do obliczeń pojedynczej ramy, pionowe przemieszczenia pominięto i analizowano jedynie przemieszczenia poziome stropów kolejnych kondygnacji. Obliczeniom poddano konstrukcję ośmiokondygnacyjną, żelbetową. Numery zmiennych wewnętrznych poszczególnych tłumików zapisano w nawiasach.

Schemat ramy wraz z przykładowym rozmieszczeniem tłumików (tłumiki są rozłożone równomiernie) z zaznaczonymi przemieszczeniami pokazano na rys. 10.

4.2. Maksymalne amplitudy drgań poziomych dla różnych położań tłumików i odpowiadające im krzywe rezonansowe

W tej części pracy, w kolejnych tabelach, zestawiono maksymalne przemieszczenia poziome poszczególnych stropów. Pogrubioną czcionką oznaczono kolumnę (ustawienie tłumika), w której podano najmniejsze wartości maksymalnych amplitud drgań.

Ponadto na kolejnych rysunkach pokazano krzywe rezonansowe przemieszczenia poziomego stropu ostatniej kondygnacji. Na rys. 11 pokazano omawianą krzywą rezonansową ramy bez tłumików drgań. Na rysunku widać dwa obszary rezonansowe. Maksymalna amplituda w drugim obszarze rezonansowym jest wielokrotnie mniejsza od maksymalnej amplitudy drgań w pierwszym obszarze rezonansowym.



Rys. 11 Krzywa rezonansowa ramy bez tłumików

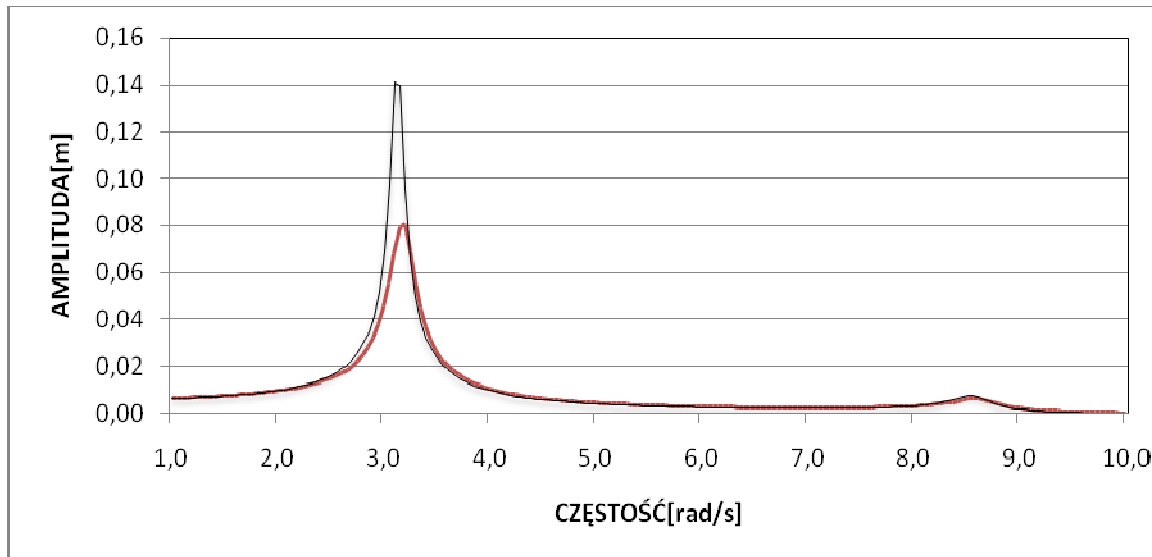
4.2.1. Optymalizacja położenia pierwszego tłumika drgań

W tabeli 3 pokazano maksymalne amplitudy drgań rezonansowych odpowiadających różnym ustawieniom pierwszego tłumika. Z obliczeń wynika, że tłumik należy umieścić na 5 kondygnacji.

Tabela 3 – Rozmieszczanie 1 tłumika

Nr przemieszczenia	Brak tłumików rozmieszczonych na stałe							
	Tłumik nr 1 umieszczony na kondygnacji							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Amplitudy maksymalnych przemieszczeń poziomych [m]							
1	0,00833	0,00642	0,00585	0,00623	0,00591	0,00652	0,00731	0,00898
6	0,02391	0,01779	0,01617	0,01747	0,01663	0,01835	0,02058	0,02531
11	0,04241	0,03183	0,02771	0,03028	0,02913	0,03220	0,03615	0,04451
16	0,06020	0,04556	0,03943	0,04180	0,04064	0,04534	0,05099	0,06289
21	0,08029	0,06113	0,05300	0,05569	0,05240	0,05950	0,06755	0,08358
26	0,09838	0,07516	0,06528	0,06849	0,06399	0,07084	0,08174	0,10207
31	0,11495	0,08801	0,07653	0,08027	0,07502	0,08235	0,09260	0,11826
36	0,12510	0,09588	0,08342	0,08748	0,08181	0,08966	0,10005	0,12624

Na rys. 12 porównano krzywą rezonansową ramy bez tłumików drgań (linia czarna) z krzywą rezonansową ramy z jednym optymalnie ustawionym tłumikiem drgań (linia czerwona). Widać, że wprowadzenie tego tłumika w istotny sposób zmniejszyło amplitudy drgań rezonansowych w obszarze pierwszego rezonansu. Widoczne jest również pewne zwiększenie częstości wymuszenia, dla którego amplitudy drgań rezonansowych są maksymalne.



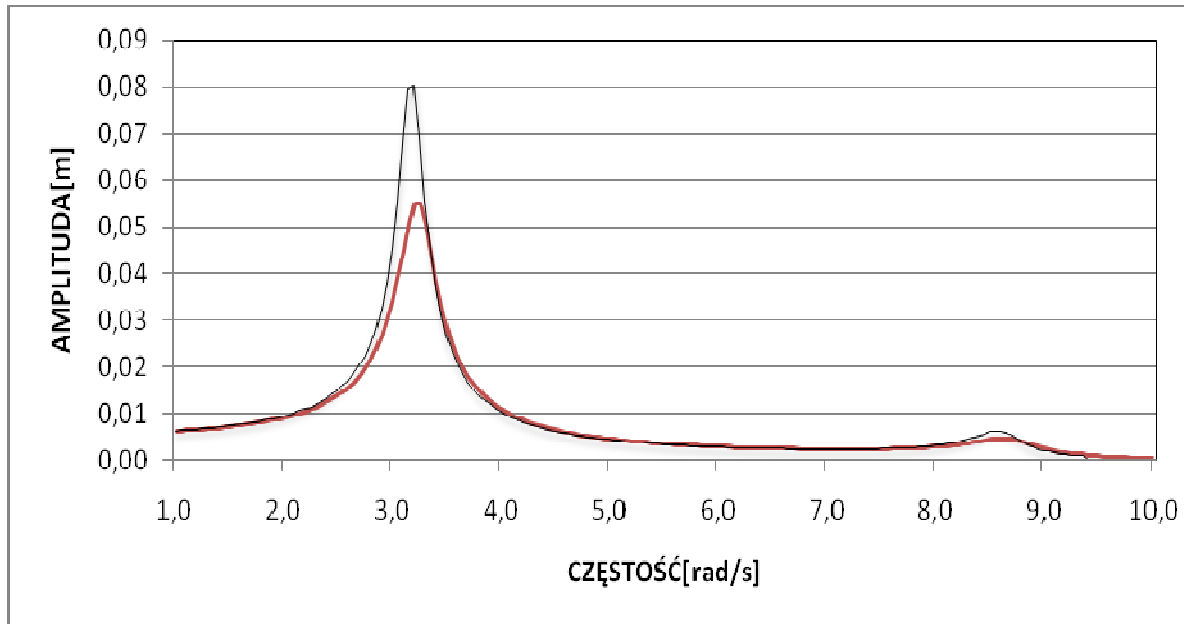
Rys. 12 Porównanie krzywych rezonansowych ramy bez tłumików (linia czarna) i krzywej rezonansowej ramy z jednym tłumikiem umieszczonym na piątej kondygnacji (linia czerwona)

4.2.2. Optymalizacja położenia drugiego tłumika drgań

W tabeli 4 pokazano wyniki obliczeń zmierzających do określenia optymalnego położenia drugiego tłumika. Optymalnym położeniem tego tłumika jest 3 kondygnacja. Krzywą rezonansową ramy z dwoma optymalnie ustawionymi tłumikami drgań (linia czerwona) porównano na rys. 13 z krzywą rezonansową ramy z jednym optymalnie ustawionym tłumikiem (linia czarna). Wprowadzenie drugiego tłumika spowodowało dalsze zmniejszenie maksymalnych amplitud drgań rezonansowych.

Tabela 4 – Rozmieszczanie 2 tłumika

Nr przemieszczenia	1 tłumik umieszczony na stałe – na 5 kondygnacji							
	Tłumik nr 2 umieszczony na kondygnacji							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Amplitudy maksymalnych przemieszczeń poziomych [m]							
1	0,00509	0,00420	0,00404	0,00437	0,00467	0,00460	0,00475	0,00542
6	0,01457	0,01161	0,01115	0,01224	0,01312	0,01291	0,01334	0,01525
11	0,02575	0,02069	0,01904	0,02114	0,02291	0,02257	0,02334	0,02670
16	0,03608	0,02923	0,02676	0,02880	0,03161	0,03137	0,03250	0,03725
21	0,04666	0,03804	0,03491	0,03721	0,03959	0,03994	0,04175	0,04800
26	0,05710	0,04670	0,04297	0,04570	0,04831	0,04747	0,05043	0,05853
31	0,06703	0,05495	0,05066	0,05381	0,05694	0,05544	0,05736	0,06811
36	0,07315	0,06004	0,05540	0,05882	0,06229	0,06053	0,06214	0,07288



Rys. 13 Porównanie krzywych rezonansowych ramy z jednym tłumikiem (linia czarna) i krzywej rezonansowej ramy z dwoma tłumikami (linia czerwona)

4.2.3. Optimalizacja położenia trzeciego tłumika drgań

W tabeli 5 pokazano wyniki obliczeń zmierzających do określenia optymalnego położenia trzeciego tłumika. Optymalnym położeniem tego tłumika jest 6 kondygnacja. Krzywą rezonansową ramy z trzema optymalnie ustawionymi tłumikami drgań (linia czerwona) porównano na rys. 14 z krzywą rezonansową ramy z dwoma optymalnie ustawionymi tłumikami (linia czarna).

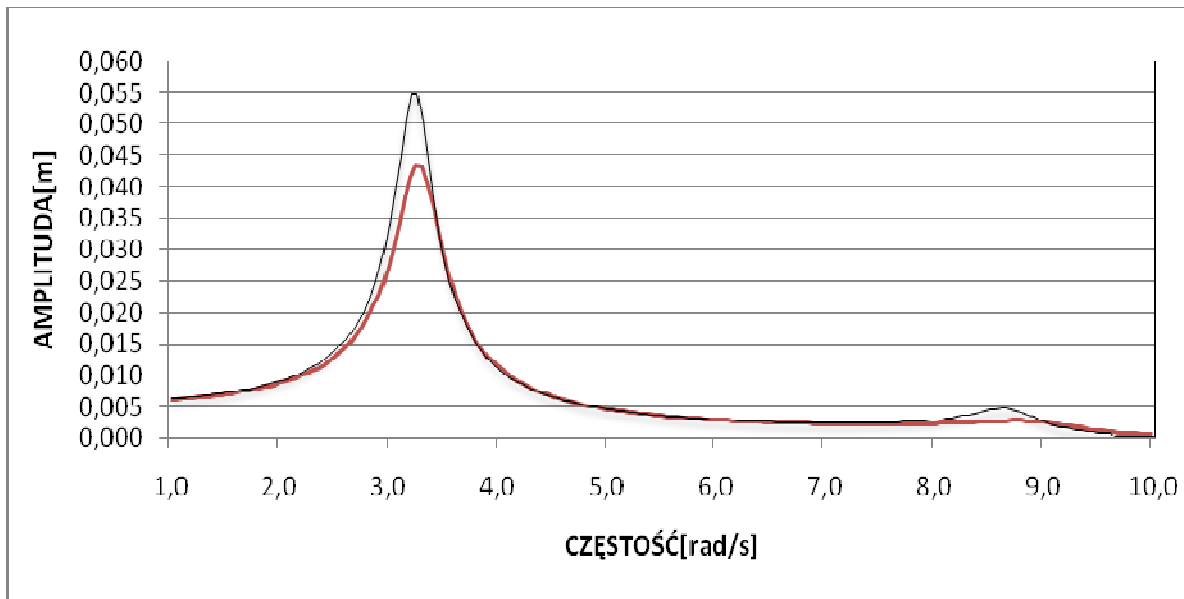
Tabela 5 – Rozmieszczanie 3 tłumika

Nr przemieszczenia	2 tłumiki umieszczone na stałe – na 5 i 3 kondygnacji							
	Tłumik nr 3 umieszczony na kondygnacji							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Amplitudy maksymalnych przemieszczeń poziomych [m]							
1	0,00357	0,00315	0,00323	0,00330	0,00339	0,00334	0,00341	0,00377
6	0,01006	0,00856	0,00877	0,00908	0,00934	0,00920	0,00941	0,01041
11	0,01733	0,01487	0,01459	0,01529	0,01587	0,01569	0,01605	0,01778
16	0,02447	0,02118	0,02064	0,02098	0,02203	0,02199	0,02251	0,02499
21	0,03202	0,02789	0,02723	0,02743	0,02775	0,02832	0,02925	0,03258
26	0,03949	0,03452	0,03376	0,03396	0,03427	0,03392	0,03561	0,04004
31	0,04663	0,04085	0,04000	0,04022	0,04051	0,03986	0,04070	0,04685
36	0,05103	0,04476	0,04386	0,04409	0,04458	0,04385	0,04422	0,05025

4.2.4. Optimalizacja położenia czwartego tłumika drgań

Wyniki obliczeń zaprezentowano w sposób analogiczny do poprzednio omówionych. W tabeli 6 pokazano wyniki obliczeń zmierzających do określenia optymalnego położenia czwartego tłumika.

Optymalnym położeniem tego tłumika jest 3 kondygnacja. Krzywą rezonansową ramy z czterema optymalnie ustawionymi tłumikami drgań (linia czerwona) porównano na rys. 14 z krzywą rezonansową ramy z trzema optymalnie ustawionymi tłumikami (linia czarna).



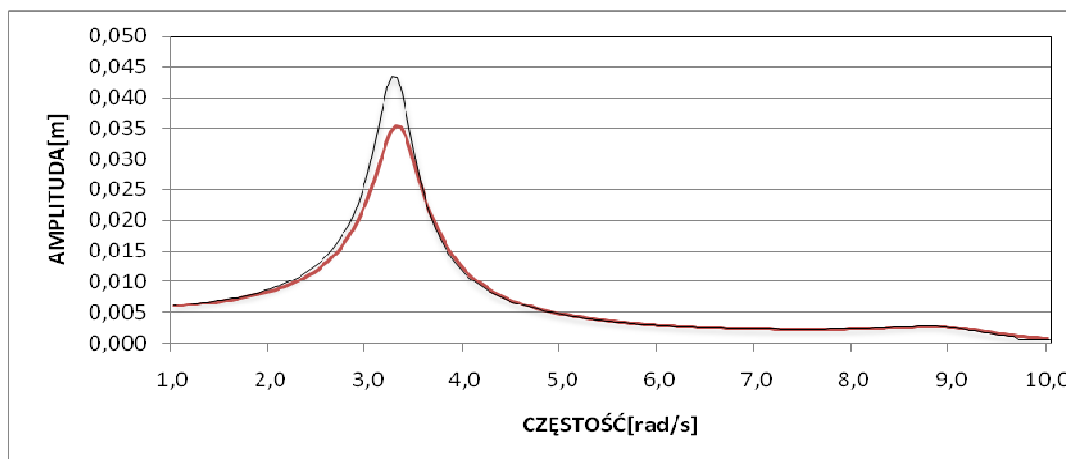
Rys. 14 Porównanie krzywych rezonansowych ramy z dwoma tłumikami (linia czarna) i krzywej rezonansowej ramy z trzema tłumikami (linia czerwona)

Tabela 6 – Rozmieszczanie 4 tłumika

Nr prze- szczenia	3 tłumiki umieszczone na stałe – na 5, 3 i 6 kondygnacji							
	Tłumik nr 4 umieszczony na kondygnacji							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Amplitudy maksymalnych przemieszczeń poziomych [m]							
1	0,00297	0,00266	0,00274	0,00281	0,00295	0,00308	0,00298	0,00315
6	0,00836	0,00721	0,00742	0,00771	0,00812	0,00849	0,00821	0,00870
11	0,01438	0,01251	0,01232	0,01296	0,01378	0,01446	0,01398	0,01483
16	0,02024	0,01777	0,01738	0,01772	0,01908	0,02021	0,01956	0,02079
21	0,02615	0,02310	0,02265	0,02288	0,02385	0,02575	0,02511	0,02676
26	0,03139	0,02782	0,02733	0,02756	0,02852	0,03007	0,02976	0,03201
31	0,03694	0,03282	0,03229	0,03253	0,03365	0,03521	0,03390	0,03733
36	0,04050	0,03602	0,03547	0,03572	0,03696	0,03862	0,03689	0,04009

4.2.5. Optimalizacja położenia pozostałych tłumików drgań

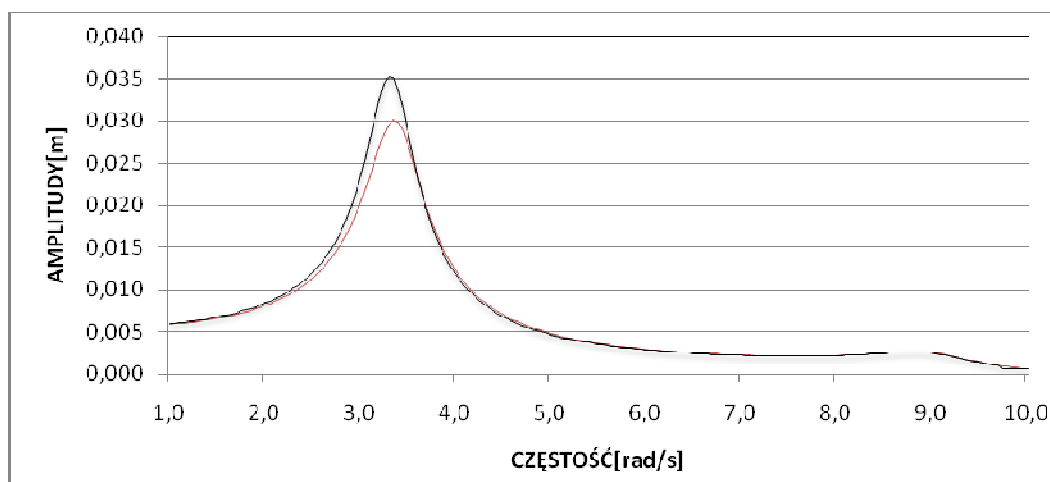
Wyniki obliczeń zaprezentowano w sposób analogiczny do poprzednio omówionych. W tabelach 7 – 10 pokazano maksymalne amplitudy drgań rezonansowych. Wyniki dotyczące rozwiązania optymalnego pogrubiono. Na rys. 15 – 19 pokazano efekty wprowadzenia kolejnego tłumika drgań poprzez porównanie odpowiednich krzywych rezonansowych.



Rys. 15 Porównanie krzywych rezonansowych ramy z trzema tłumikami (linia czarna) i krzywej rezonansowej ramy z czterema tłumikami (linia czerwona)

Tabela 7 – Rozmieszczenie 5 tłumika

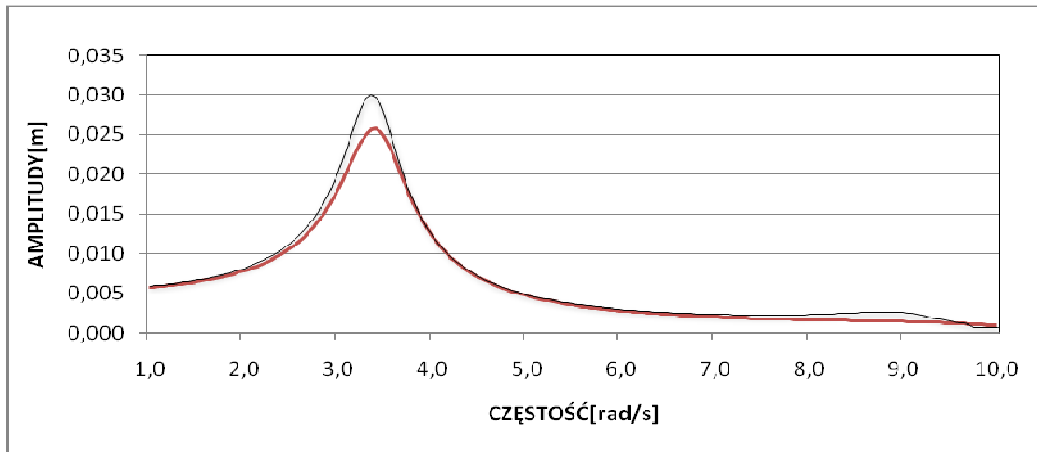
Nr przemieszczenia	4 tłumiki umieszczone na stałe – na 5, 3, 6 i 3 kondygnacji							
	Tłumik nr 5 umieszczony na kondygnacji							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Amplitudy maksymalnych przemieszczeń poziomych [m]							
1	0,00249	0,00226	0,00241	0,00239	0,00246	0,00255	0,00247	0,00260
6	0,00686	0,00602	0,00641	0,00645	0,00665	0,00689	0,00669	0,00705
11	0,01148	0,01017	0,01037	0,01055	0,01098	0,01142	0,01108	0,01170
16	0,01626	0,01456	0,01474	0,01453	0,01531	0,01608	0,01562	0,01651
21	0,02122	0,01915	0,01940	0,01897	0,01934	0,02072	0,02028	0,02150
26	0,02563	0,02323	0,02358	0,02303	0,02331	0,02436	0,02421	0,02591
31	0,03030	0,02757	0,02801	0,02735	0,02767	0,02869	0,02772	0,03038
36	0,03329	0,03034	0,03085	0,03012	0,03047	0,03156	0,03024	0,03270



Rys. 16 Porównanie krzywych rezonansowych ramy z czterema tłumikami (linia czarna) i krzywej rezonansowej ramy z pięcioma tłumikami (linia czerwona)

Tabela 8 – Rozmieszczenie 6 tłumika

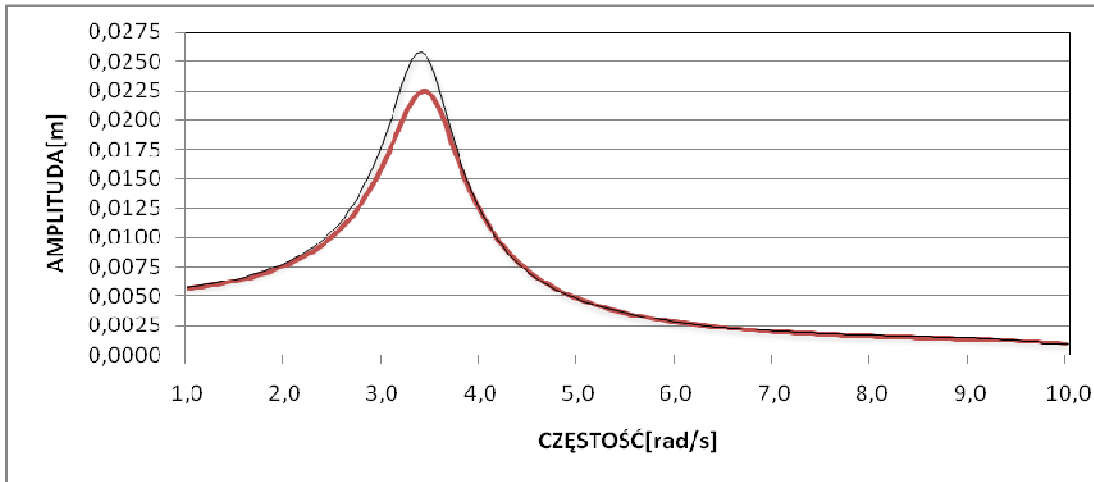
Nr prze- szczenia	5 tłumików umieszczonych na stałe – na 5, 3, 6, 3 i 4 kondygnacji							
	Tłumik nr 6 umieszczony na kondygnacji							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Amplitudy maksymalnych przemieszczeń poziomych [m]							
1	0,00218	0,00199	0,00214	0,00220	0,00219	0,00223	0,00217	0,00229
6	0,00599	0,00528	0,00568	0,00590	0,00591	0,00602	0,00586	0,00618
11	0,00988	0,00879	0,00906	0,00953	0,00963	0,00984	0,00957	0,01011
16	0,01367	0,01229	0,01257	0,01283	0,01311	0,01352	0,01316	0,01391
21	0,01789	0,01620	0,01660	0,01679	0,01659	0,01745	0,01712	0,01813
26	0,02174	0,01979	0,02030	0,02050	0,02012	0,02063	0,02055	0,02196
31	0,02584	0,02360	0,02424	0,02447	0,02401	0,02443	0,02363	0,02585
36	0,02846	0,02605	0,02677	0,02702	0,02652	0,02695	0,02585	0,02788



Rys. 17 Porównanie krzywych rezonansowych ramy z pięcioma tłumikami (linia czarna) i krzywej rezonansowej ramy z sześcioma tłumikami (linia czerwona)

Tabela 9 – Rozmieszczenie 7 tłumika

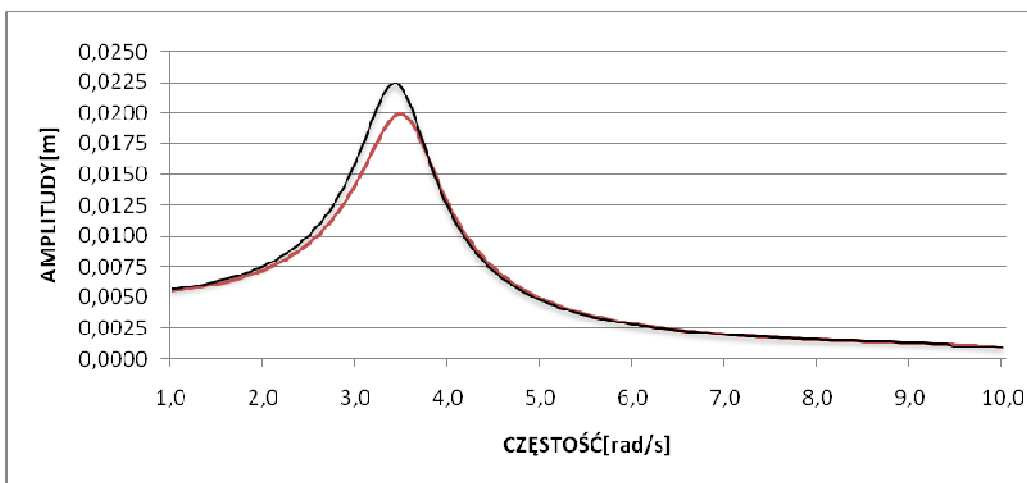
Nr prze- szczenia	6 tłumików umieszczonych na stałe – na 5, 3, 6, 3, 4 i 7 kondygnacji							
	Tłumik nr 7 umieszczony na kondygnacji							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Amplitudy maksymalnych przemieszczeń poziomych [m]							
1	0,00199	0,00183	0,00195	0,00200	0,00201	0,00207	0,00211	0,00213
6	0,00545	0,00484	0,00517	0,00538	0,00540	0,00557	0,00569	0,00573
11	0,00898	0,00805	0,00823	0,00867	0,00879	0,00908	0,00929	0,00935
16	0,01240	0,01121	0,01140	0,01164	0,01195	0,01246	0,01275	0,01286
21	0,01618	0,01472	0,01500	0,01518	0,01507	0,01604	0,01654	0,01671
26	0,01945	0,01776	0,01813	0,01833	0,01806	0,01878	0,01968	0,02002
31	0,02239	0,02050	0,02096	0,02117	0,02086	0,02154	0,02202	0,02286
36	0,02450	0,02246	0,02299	0,02322	0,02289	0,02360	0,02394	0,02451



Rys. 18 Porównanie krzywych rezonansowych ramy z sześcioma tłumikami (linia czarna) i krzywej rezonansowej ramy z siedmioma tłumikami (linia czerwona)

Tabela 10 – Rozmieszczenie 8 tłumika

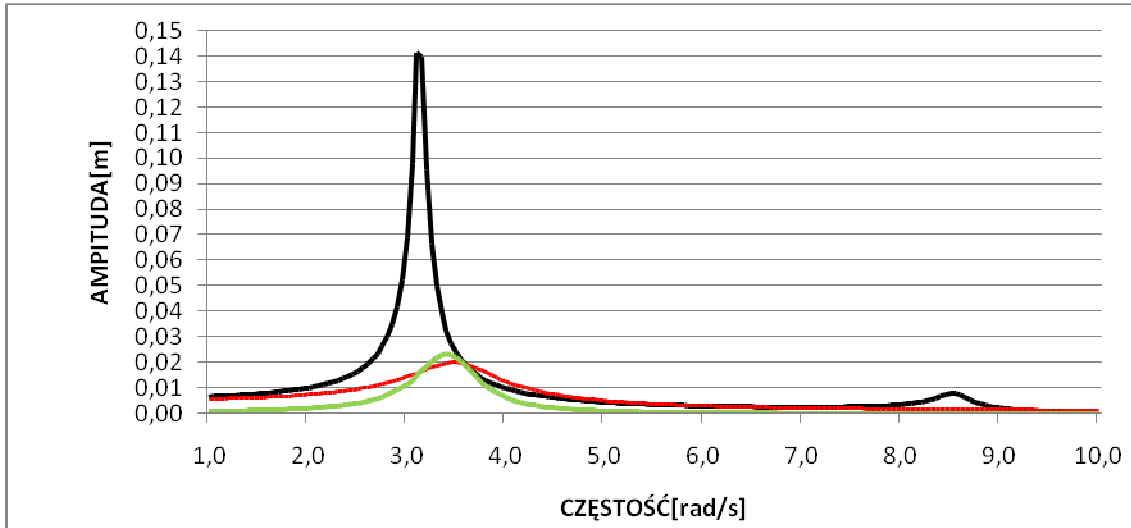
Nr przemieszczenia	7 tłumików umieszczonych na stałe – na 5, 3, 6, 3, 4, 7 i 2 kondygnacji							
	Tłumik nr 8 umieszczony na kondygnacji							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Amplitudy maksymalnych przemieszczeń poziomych [m]							
1	0,00169	0,00159	0,00167	0,00170	0,00170	0,00175	0,00178	0,00178
6	0,00455	0,00414	0,00436	0,00448	0,00448	0,00462	0,00470	0,00472
11	0,00763	0,00700	0,00705	0,00734	0,00742	0,00766	0,00780	0,00784
16	0,01067	0,00989	0,00989	0,00998	0,01021	0,01065	0,01086	0,01093
21	0,01404	0,01311	0,01312	0,01313	0,01299	0,01382	0,01423	0,01434
26	0,01696	0,01591	0,01594	0,01594	0,01565	0,01626	0,01702	0,01729
31	0,01959	0,01843	0,01848	0,01847	0,01813	0,01871	0,01912	0,01982
36	0,02147	0,20230	0,02030	0,02029	0,01992	0,02053	0,02082	0,02128



Rys. 19 Porównanie krzywych rezonansowych ramy z siedmioma tłumikami (linia czarna) i krzywej rezonansowej ramy z ośmioma tłumikami (linia czerwona)

4.2.6. Porównanie krzywych rezonansowych

Porównano również krzywe rezonansowe ramy bez tłumików drgań (linia czarna na rys. 20), ramy z tłumikami ustawionymi optymalnie (linia czerwona) i ramy z tłumikami rozmieszczonymi równomiernie (linia zielona).



Rys. 20 Porównanie krzywych rezonansowych ramy bez tłumików drgań (linia czarna), krzywej rezonansowej ramy z tłumikami rozmieszczonymi optymalnie (linia czerwona) i krzywej rezonansowej ramy z tłumikami rozmieszczonymi równomiernie (linia zielona)

4.3. Wynik optymalizacji

W rezultacie przeprowadzonych obliczeń otrzymano następujące, optymalne w myśl przyjętego kryterium, ustawienie lepkosprężystych tłumików drgań:

- 0 tłumików na 1 kondygnacji,
- 1 tłumik na 2 kondygnacji,
- 2 tłumiki na 3 kondygnacji,
- 1 tłumik na 4 kondygnacji,
- 2 tłumiki na 5 kondygnacji,
- 1 tłumik na 6 kondygnacji,
- 1 tłumik na 7 kondygnacji,
- 0 tłumików na 8 kondygnacji.

W porównaniu z innymi zadaniami dotyczącymi optymalizacji położenia tłumików drgań zwraca uwagę prawie równomierny, optymalny rozkład tłumików.

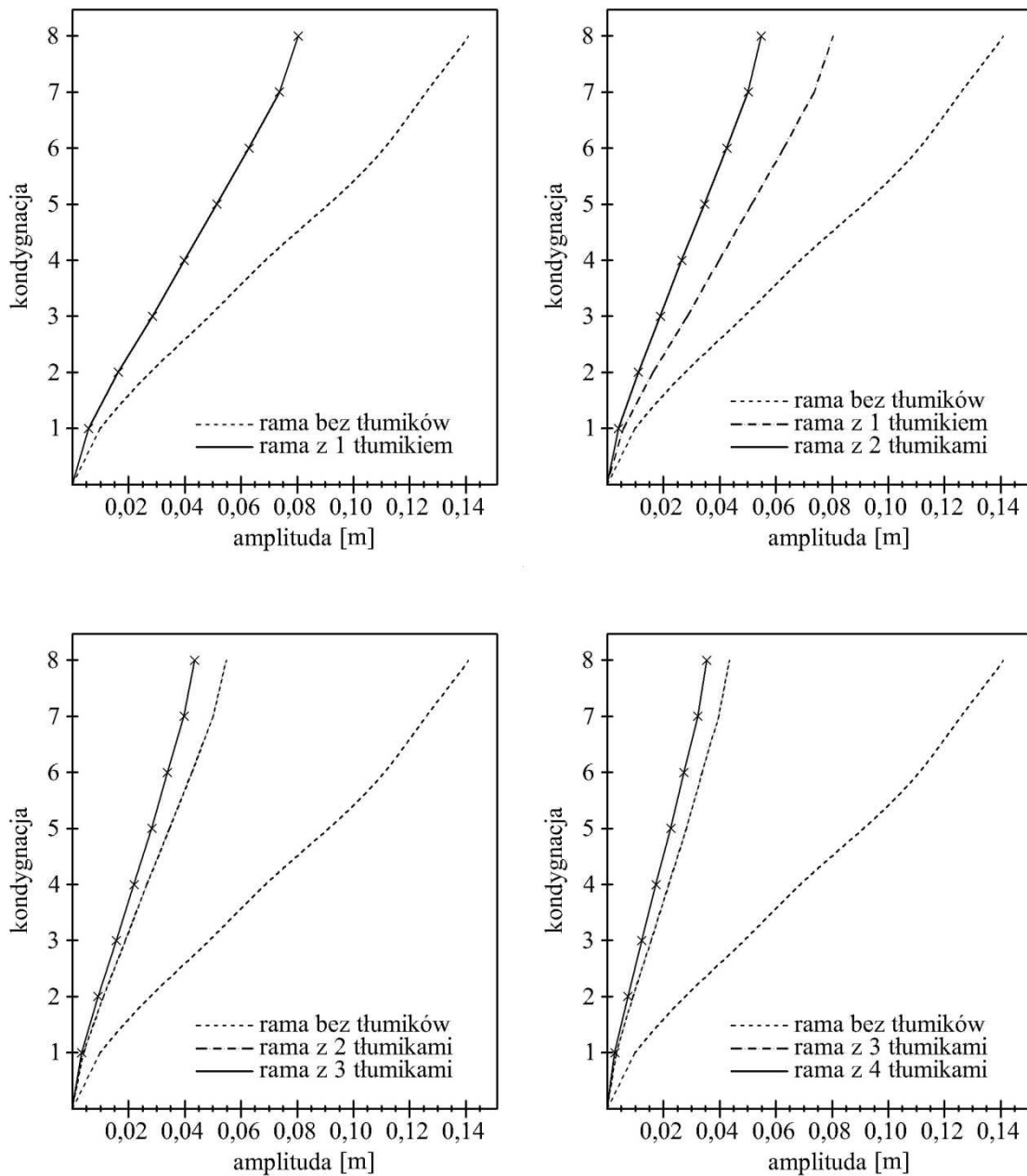
Redukcja amplitud drgań rezonansowych uzyskana przez wprowadzenie ośmiu tłumików drgań wynosi około 86%.

4.4. Rozkład przestrzenny amplitud drgań

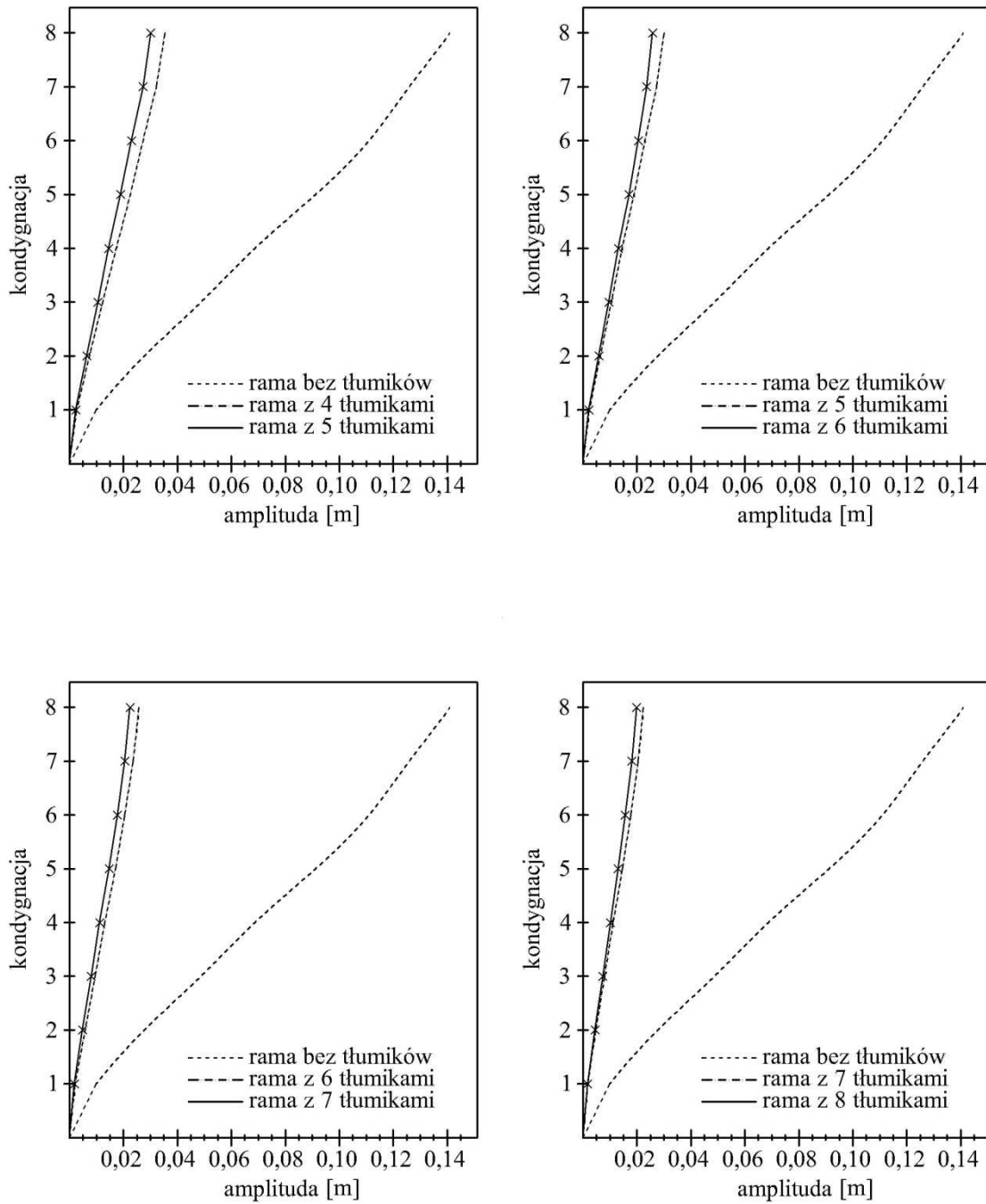
W uzupełnieniu poprzednio podanych informacji poniżej na rys. 21 i 22 pokazano w jaki sposób zmieniają się maksymalne amplitudy poziomych drgań rezonansowych na poszczególnych kondygnacjach rozpatrywanej ramy. Na kolejnych wykresach przedstawiono rozkład przestrzenny omawianych amplitud drgań ramy z aktualnie wprowadzonym tłumikiem (linia ciągła z krzyżkami), rozkład przestrzenny amplitud drgań ramy z poprzednio ustawionymi tłumikami (linia kreskowana)

oraz rozkład przestrzenny amplitud drgań ramy bez tłumików (linia kropkowana). Z porównania kolejnych wykresów wynika, że redukcja amplitud drgań uzyskana przez wprowadzenie kolejnych tłumików jest coraz mniejsza. Widać, że wprowadzenie więcej niż 4 tłumików tylko w małym stopniu zmniejsza amplitudy drgań rezonansowych. Po umieszczeniu na konstrukcji 4 tłumików drgań redukcja maksymalnych amplitud drgań wynosi około 75%. Jeżeli poprzestać na ustawieniu 4 tłumików drgań to optymalne rozmieszczenie tłumików jest następujące:

- 2 tłumiki umieszczone na 3 kondygnacji,
- 1 tłumik umieszczony na 5 kondygnacji,
- 1 tłumik umieszczony na 6 kondygnacji.



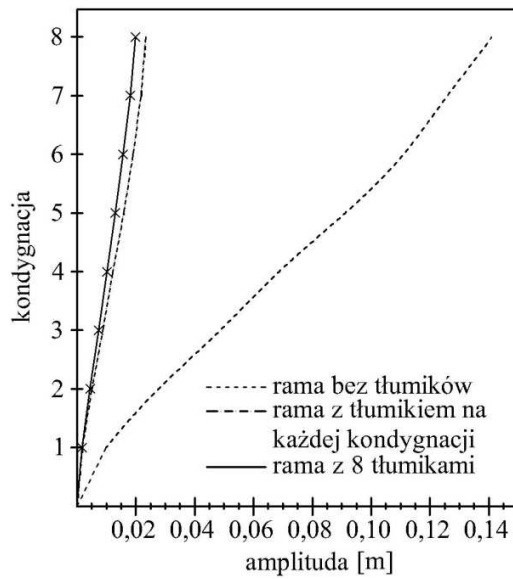
Rys. 21 Rozkład przestrzenny maksymalnych amplitud drgań rezonansowych ramy w zależności od liczby tłumików drgań



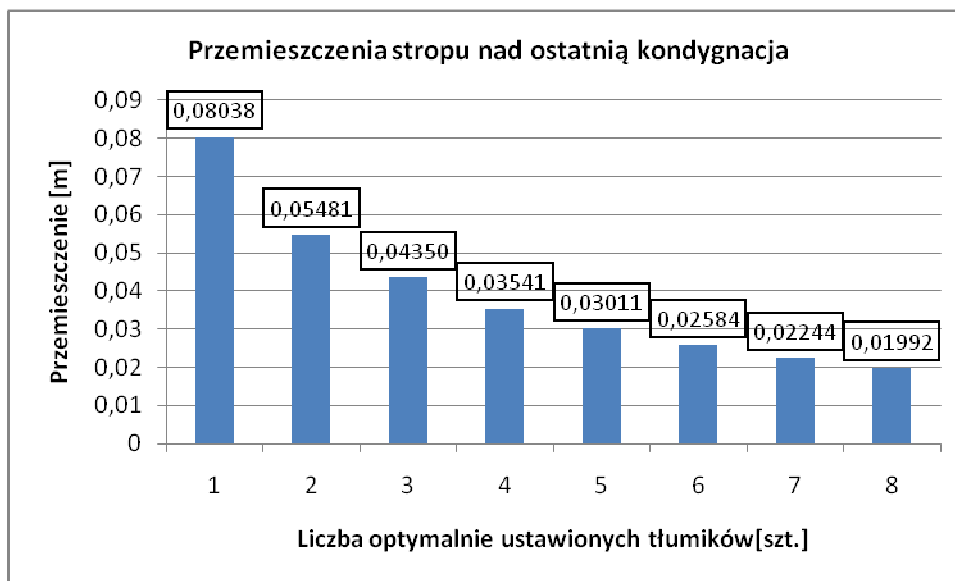
Rys. 22 Rozkład przestrzenny maksymalnych amplitud drgań rezonansowych ramy w zależności od liczby tłumików drgań

Na rys. 23 dokonano podobnego porównania z tym tylko, że porównano wyniki otrzymane dla ramy z optymalnie rozmieszczonymi tłumikami drgań (linia ciągła z krzyżykami) z wynikami uzyskanymi dla ramy z tłumikami równomiernie rozłożonymi (linia kreskowana) i z wynikami dla ramy bez tłumików (linia kropkowana).

Na rys. 24 pokazano maksymalne amplitudy drgań rezonansowych stropu ostatniej kondygnacji w zależności od liczby zainstalowanych tłumików.



Rys. 23 Rozkład przestrzenny maksymalnych amplitud drgań rezonansowych ramy bez tłumików (linia kropkowana), ramy z tłumikami rozmieszczonymi optymalnie (linia ciągła) i ramy z tłumikami rozmieszczonymi równomiernie (linia przerywana)

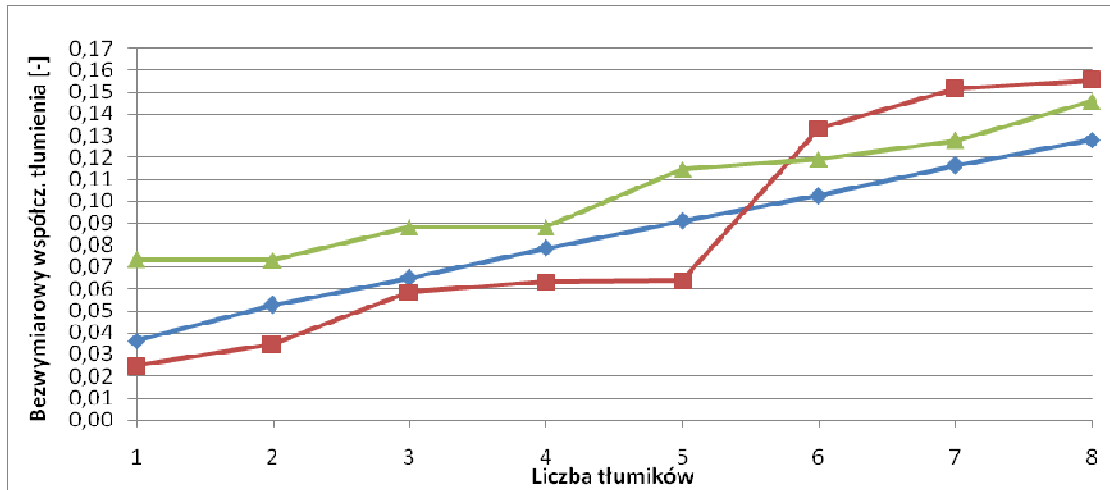


Rys. 24 Zmiana maksymalnej amplitudy drgań rezonansowych stropu ostatniej kondygnacji w zależności od liczby tłumików

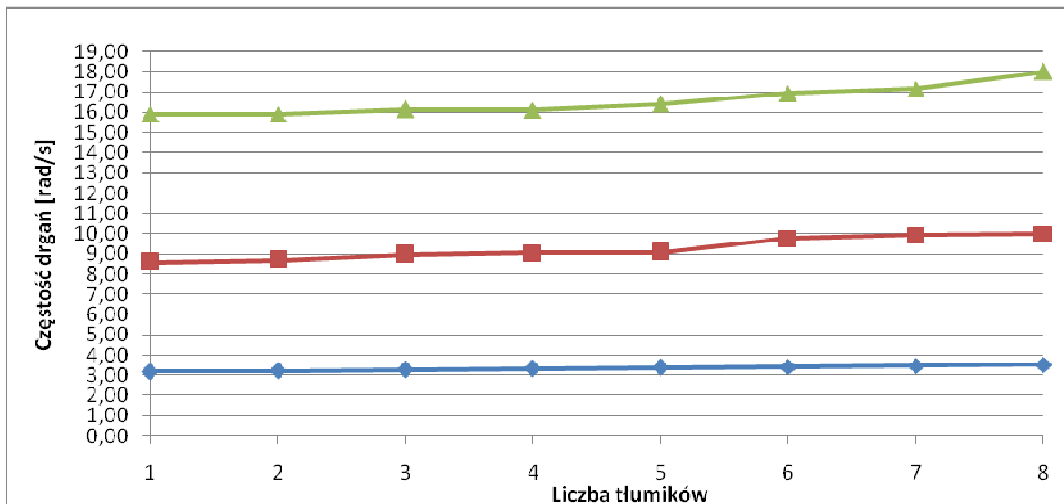
4.5. Zmiana charakterystyk dynamicznych ramy spowodowana tłumikami drgań

Wprowadzenie do układu lepkosprężystych tłumików drgań jest zwiększa nie tylko zdolności tłumienia ramy, ale zwiększa także sztywność całego układu. Zmieniają się wobec tego charakterystyki dynamiczne układu, tzn. częstotliwości drgań własnych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia modalnego. Zmianę tych wielkości wywołaną wprowadzeniem tłumików drgań pokazano na rys. 25 i 26. Na rys. 25 pokazano jak zmieniają się bezwymiarowe współczynniki tłumienia modalnego trzech pierwszych postaci drgań w zależności od liczby wprowadzonych tłumików. Na rys. 26 pokazano podobną

zależność dotyczącą trzech pierwszych częstości drgań własnych. Widać, że bezwymiarowy współczynnik tłumienia modalnego 1 postaci drgań jest liniową funkcją liczby tłumików drgań. Obserwuje się istotny wzrost wartości wszystkich omawianych bezwymiarowych współczynników tłumienia modalnego. Wzrastają również pierwsze trzy częstości drgań własnych, ale wzrost ich wartości jest niewielki.



Rys. 25 Zależność bezwymiarowych współczynników tłumienia modalnego od liczby tłumików; linia niebieska – bezwymiarowy współczynnik tłumienia współczynnik tłumienia 1 postaci drgań, linia czerwona – bezwymiarowy współczynnik tłumienia 2 postaci drgań, linia zielona – bezwymiarowy współczynnik tłumienia 3 postaci drgań



Rys. 26 Zależność częstości drgań własnych od liczby tłumików; linia niebieska – 1 częstość drgań własnych, linia czerwona – 2 częstość drgań własnych, linia zielona – 3 częstość drgań własnych

5. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono wyniki obliczeń zmierzających do optymalnego rozmieszczenia na ramie płaskiej lepkosprężystych tłumików drgań. Jako kryterium optymalizacji przyjęto wartość maksymalnego przemieszczenia poziomego ostatniego stropu wywołanego harmonicznie zmiennym przemieszczeniem podpór ramy. W procesie optymalizacji starano się tak rozmieścić tłumiki drgań, aby omawiane przemieszczenie było minimalne. Do obliczeń zastosowano tzw. metodę sekwencyjnej



optymalizacji. Zachowanie dynamiczne lepkosprężystego tłumika drgań opisano za pomocą 7 parametrowego uogólnionego modelu Kelvina.

Wyniki obliczeń upoważniają do sformułowania następujących spostrzeżeń:

- możliwa jest bardzo znaczna redukcja drgań za pomocą tłumików lepkosprężystych,
- w omawianym przypadku optymalne rozmieszczenie tłumików jest bardzo zbliżone do rozmieszczenia równomiernego,
- redukcja drgań uzyskana przy optymalnym rozmieszczeniu tłumików jest nieznacznie większa od redukcji drgań uzyskanej przy równomiernym rozmieszczeniu tłumików,
- przyrost redukcji drgań związanych z wprowadzeniem kolejnych tłumików drgań zmniejsza się wraz ze wzrostem liczby tłumików ustawionych na ramie,
- w omawianym przypadku najbardziej ekonomicznym rozwiązaniem wydaje się być zastosowanie tylko 4 tłumików drgań.