

**Analiza wpływu tłumienia wiskotycznego na charakterystyki
dynamiczne belki**

Roman Lewandowski, Mariusz Wróbel, Radosław Pyżanowski

Poznań, maj 2009

1 Wstęp

Kładki dla pieszych to zazwyczaj konstrukcje o dużej rozpiętości i dużej podatności dynamicznej. Częstości drgań własnych kładek są niskie, a piesi poruszający się po kładce mogą wywoływać drgania o dużych amplitudach. Piesi mogą wzbudzić drgania pionowe kładki o dużych amplitudach jeżeli wartość jednej z częstości drgań własnych kładki będzie w przedziale: 1,6 – 2,4 Hz (10,0 – 15,0 rad/s).

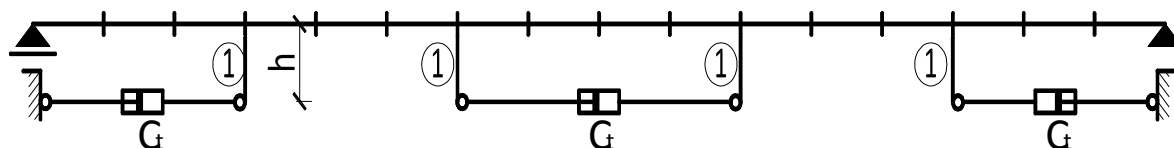
W nowoczesnych rozwiązaniach konstrukcyjnych amplitudy drgań omawianych kładek zmniejsza się wprowadzając różnego rodzaju tłumiki drgań. W tym celu często stosuje się masowe tłumiki drgań [1]. Możliwe jest również zastosowanie innego typu tłumików, np. tłumików wiskotycznych [1]. Analiza możliwości tłumienia drgań kładek za pomocą tłumików wiskotycznych jest przedmiotem niniejszego opracowania.

Tłumik wiskotyczny składa się z cylindra wypełnionego lepką cieczą. W cylindrze umieszczony jest tłok z otworami przez które, w trakcie ruchu tłoka względem cylindra, przepływa ciecz. Ponieważ otwory w cylindrze są małe więc przepływ cieczy wymaga pokonano stosunkowo dużych sił oporu. Przykładowy sposób wbudowania tłumika w belkę pokazano na Rys. 1. Cylinder tłumika i tłok, za pośrednictwem tłoczyska, są połączone z dwoma punktami belki (porównaj Rys. 1). Różnice przemieszczeń tych punktów decydują zarówno o względnych przemieszczeniach tłoka w cylindrze jak i względnych prędkościach przemieszczeń, a tym samym o możliwościach rozpraszania energii przez tłumik wiskotyczny. Wielkość sił tłumienia zależy także od wartości współczynnika tłumienia C_t .

Zachowanie tłumika wiskotycznego opisuje równanie:

$$u(t) = C_t \dot{x}(t), \quad (1)$$

gdzie symbolami $u(t)$, C_t i $\dot{x}(t)$ oznaczono odpowiednio siłę w tłumiku, współczynnik tłumienia tłumika oraz względną prędkość przemieszczenia tłumika względem cylindra.



Rys. 1 Schemat obliczeniowy belki z wbudowanymi tłumikami drgań

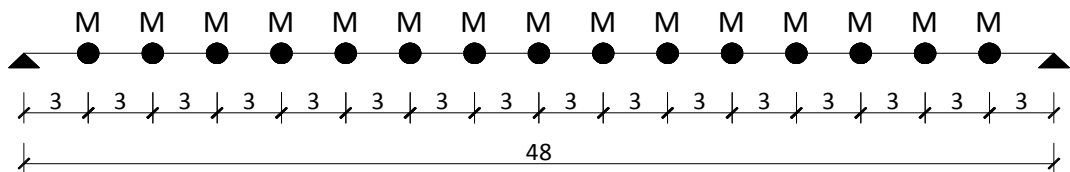
Właściwości dynamiczne konstrukcji zazwyczaj charakteryzuje się za pomocą częstości i postaci drgań własnych oraz bezwymiarowych współczynników tłumienia modalnego. Tą ostatnią wielkość ustala się zazwyczaj doświadczalnie ze względu na brak odpowiednio prostego i precyzyjnego modelu teoretycznego opisującego właściwości tłumiące konstrukcji. Bezwymiarowy współczynnik tłumienia można jednak stosunkowo precyzyjnie wyznaczyć dla konstrukcji z tłumikami drgań ponieważ parametry tłumików są dobrze określone.

Celem niniejszego opracowania jest analiza wpływu współczynnika tłumienia na wspomniane powyżej charakterystyki dynamiczne konstrukcji. W charakterze przykładu rozpatruje się belkę swobodnie podpartą z wbudowanymi trzema wiskotycznymi tłumikami drgań tak jak to pokazano na Rys. 1.

2 Charakterystyki dynamiczne kładki

2.1 Model obliczeniowy kładki

Kładka traktowana jest jako belka swobodnie podparta o rozpiętości $L=48,0$ m. Dźwigar główny kładki wykonany jest z blachownicy stalowej (rura prostokątna o wymiarach: a) zewnętrzne: $H=1,6$ m $B=0,6$ m b) wewnętrzne: $h=1,5$ m $b=0,58$ m) nie współpracującej z pomostem. Sztywność giętą dźwigara wynosi $EJ = 1,71 \times 10^{10} Nm^2$. W obliczeniach dynamicznych zastosowano model belki z masami skupionymi, rozmieszczonymi co 3.0 m. Na masę jednostkową kładki składają się: masa dźwigara, stężeń poprzecznych i wyposażenia (balustrada, dyle drewniane). Masa jednostkowa belki jest równa 2152,0 kg/m. Wartość pojedynczej masy skupionej jest równa 6456,2 kg. Schemat dynamiczny belki pokazano na Rys. 2.



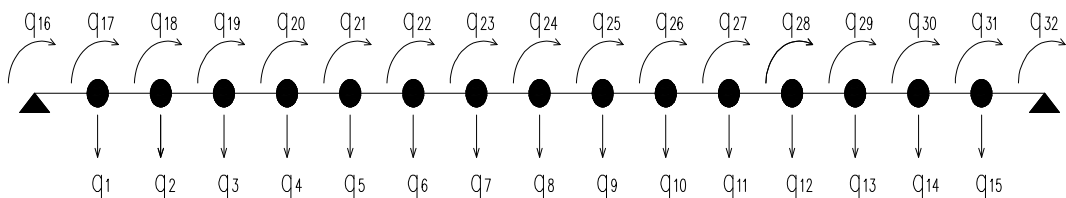
Rys. 2 Schemat dynamiczny belki

Maksymalne naprężenie wywołane ciężarem własnym kładki wynosi:

$$\sigma = 7,37 kN/cm^2 < f_d = 29,5 kN/cm^2.$$

W obliczeniach pomija się bezwładność obrotową mas skupionych. Przeszacowania uogólnione belki, które są traktowane jako stopnie swobody kinematycznej, pokazano na Rys. 3. Z przemieszczeń tych tworzy się wektor

$$\underline{q}_i = col(\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{q}_3, \dots, \underline{q}_{32}).$$

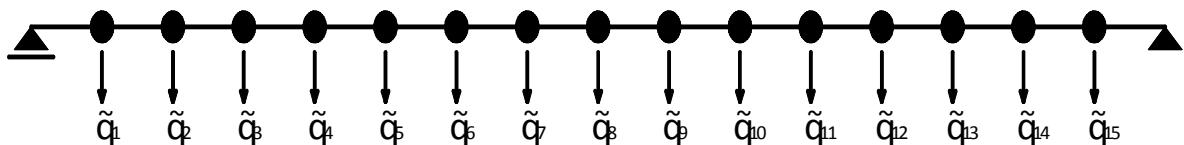


Rys. 3 Stopnie kinematycznej swobody

Z kolei na Rys. 4 pokazano stopnie dynamicznej swobody z których utworzono wektor

$$\tilde{q}_i = col(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \dots, \tilde{q}_{15}).$$

Z powyższych definicji wynika, że $\tilde{q}_i \equiv q_i$ dla $i=1,2,\dots,15$.



Rys. 4 Stopnie dynamicznej swobody

2.2 Równania ruchu belki bez tłumików drgań

Na początek macierzowe równania ruchu zapiszemy posługując się stopniami kinematycznej swobody zestawionych w wektorze \underline{q} . Ma ono postać:

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{q}}(t) + \underline{K} \underline{q}(t) = \underline{P}(t), \quad (2)$$

gdzie symbolami \underline{M} , \underline{C} , \underline{K} i $\underline{P}(t)$ oznaczono odpowiednio macierz mas, tłumienia i sztywności oraz wektor wymuszenia zewnętrznego. Wektor \underline{q} dzieli się na dwie części (tzn. $\underline{q} = \text{col}(\underline{q}_z, \underline{q}_r)$) gdzie w podwektorze \underline{q}_z zestawione są tzw. zasadnicze stopnie swobody (przyjmujemy dalej, że $\underline{q}_z \equiv \tilde{\underline{q}}$), a w wektorze \underline{q}_r są zgrupowane tzw. zredukowane stopnie swobody. Tutaj $\underline{q}_r = \text{col}(q_{16}, q_{17}, \dots, q_{32})$.

Równanie ruchu (2) przedstawia się w postaci blokowej:

$$\underline{M}_{zz} \ddot{\underline{q}}_z + \underline{K}_{zz} \underline{q}_z + \underline{K}_{zr} \underline{q}_r = \underline{P}_z(t), \quad (3)$$

$$\underline{K}_{rz} \underline{q}_z + \underline{K}_{rr} \underline{q}_r = \underline{0}. \quad (4)$$

Pisząc równania (3) i (4) pominięto siły tłumienia, uwzględniono, że bezwładności obrotowe mas skupionych są równe zero oraz założono, że po kierunku przemieszczeń zestawionych w wektorze \underline{q}_r nie działają siły zewnętrzne. Teraz wykonuje się tzw. redukcję statyczną wymiarów zadania dynamicznego. Pozwala ona na zapisanie równań ruchu w którym występują tylko stopnie dynamicznej swobody zestawione w wektorze \underline{q}_z . Z równania (4) wynika wzór

$$\underline{q}_r(t) = -\underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{rz} \underline{q}_z, \quad (5)$$

który podstawiony do równania (3) pozwala je przepisać w postaci:

$$\underline{M}_{zz} \ddot{\underline{q}}_z + (\underline{K}_{zz} - \underline{K}_{zr} \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{rz}) \underline{q}_z = \underline{P}_z(t). \quad (6)$$

W równaniu (6) występuje tylko wektor \underline{q}_z zawierający stopnie dynamicznej swobody belki. Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\tilde{\underline{M}} = \underline{M}_{zz}, \quad \tilde{\underline{q}}(t) = \underline{q}_z, \quad \tilde{\underline{K}} = \underline{K}_{zz} - \underline{K}_{zr} \cdot \underline{K}_{rr}^{-1} \cdot \underline{K}_{rz}, \quad \tilde{\underline{P}}(t) = \underline{P}_z(t),$$

można równanie (6) przepisać w postaci:

$$\tilde{\underline{M}} \ddot{\tilde{\underline{q}}}(t) + \tilde{\underline{K}} \tilde{\underline{q}}(t) = \tilde{\underline{P}}(t). \quad (7)$$

Właściwości tłumiące kładki uwzględniono w klasyczny sposób. Siły tłumienia wiskotycznego można przedstawić w postaci $\tilde{\underline{C}} \dot{\tilde{\underline{q}}}(t)$, a macierz $\tilde{\underline{C}}$ wyznaczyć ze wzoru:

$$\tilde{\underline{C}} = \alpha \tilde{\underline{M}} + \beta \tilde{\underline{K}}, \quad (8)$$

gdzie symbolami $\tilde{\underline{M}}$ i $\tilde{\underline{K}}$ oznaczono odpowiednio macierz mas i macierz sztywności belki. Współczynniki α i β występujące w (8) wyznaczono zakładając, że bezwymiarowe współczynniki tłumienia 1 i 2 postaci drgań są równe 0,01.

Ostatecznie równanie drgań tłumionych belki może być zapisane w postaci:

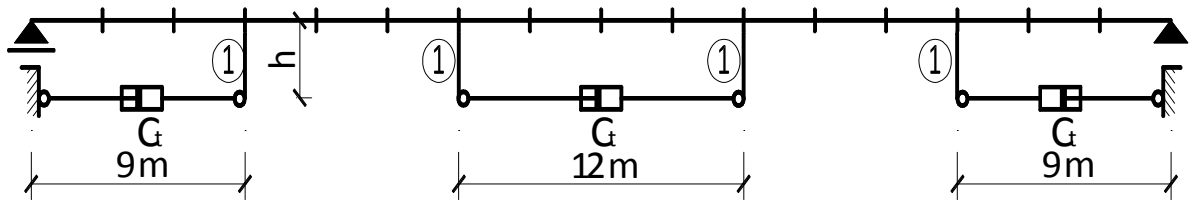
$$\underline{\tilde{M}} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\tilde{C}} \dot{\underline{q}}(t) + \underline{\tilde{K}} \underline{q}(t) = \underline{\tilde{P}}(t) . \quad (9)$$

2.3 Równania ruchu belki z wbudowanymi tłumikami drgań

Schemat obliczeniowy kładki z wbudowanymi tłumikami drgań pokazano na Rys. 5. Siłę w tłumiku wiskotycznym wyznacza się ze wzoru:

$$u(t) = C_t \dot{x}(t) , \quad (10)$$

gdzie symbolami $u(t)$, C_t i $\dot{x}(t)$ oznaczono odpowiednio siłę w tłumiku, współczynnik tłumienia tłumika oraz względną prędkość przemieszczenia tłumika względem cylindra.



Rys. 5 Schemat obliczeniowy belki z tłumikami drgań

Długości wsporników łączących tłumik z belką są równe 1,5 m.

Przyjmujemy dalej że, tłocznisko, element łączący obudowę tłumika z konstrukcją kładki oraz wsporniki, które umożliwiają połączenie tłumików z belką są nieodkształcalne. Zaważmy, że przy tych założeniach liczba stopni swobody kinematycznej i liczba stopni swobody dynamicznej belki z tłumikami drgań jest taka sama jak belki bez tłumików.

Belka jest teraz obciążona siłami bezwładności, siłami wymuszającymi oraz siłami oddziaływania tłumików. Obciążenie rozpatrywanej belki pokazano na Rys. 6. Momenty M_3 , M_6 , M_{10} , M_{16} są wynikiem oddziaływania tłumików na kładkę. Tłumiki powodują również powstanie sił poziomych zaczepionych w punktach 3, 6, 10 i 13. Siły te nie zostały pokazane na Rys. 6 ponieważ siły te są one nieistotne dla dalszych rozważań.

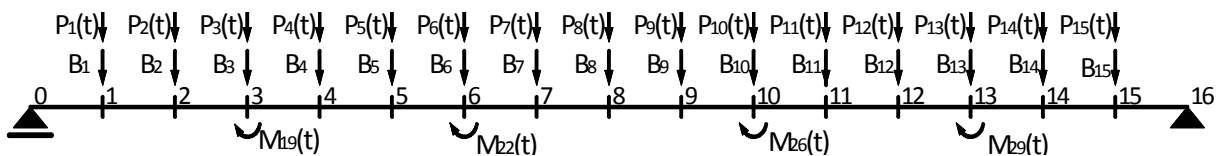
Utwórzmy wektor momentów zdefiniowany w następujący sposób:

$$\underline{\tilde{m}} = \text{col}(0,0,0, M_{19}(t), 0,0, M_{22}(t), 0,0,0, M_{26}(t), 0,0, M_{29}(t), 0,0,0) . \quad (11)$$

Momenty te należy uwzględnić pisząc równania ruchu belki. Równania ruchu zapisane w postaci blokowej mają postać:

$$\underline{M}_{zz} \ddot{\underline{q}}_z + \underline{K}_{zz} \underline{q}_z + \underline{K}_{zr} \underline{q}_r = \underline{P}_z(t) , \quad (12)$$

$$\underline{K}_{rz} \underline{q}_z + \underline{K}_{rr} \underline{q}_r = \underline{\tilde{m}}(t) . \quad (13)$$



Rys. 6 Siły działające na belkę z wbudowanymi tłumikami drgań

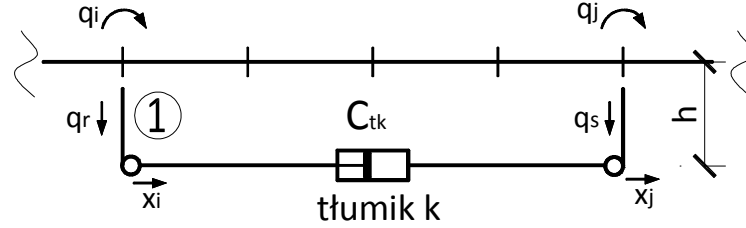
Wykonując, tak jak poprzednio, redukcję statyczną mamy:

$$\underline{q}_r(t) = -\underline{K}_{rz}^{-1} \underline{K}_{zz} \underline{q}_z + \underline{K}_{rz}^{-1} \underline{\tilde{m}}(t) , \quad (14)$$

co po podstawieniu do (12) prowadzi do równania o postaci:

$$\underline{M}_{zz} \ddot{\underline{q}}_z + (\underline{K}_{zz} - \underline{K}_{zr} \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{rz}) \underline{q}_z + \underline{K}_{zr} \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{rz} \underline{\tilde{m}}(t) = \underline{P}_z(t). \quad (15)$$

Teraz należy wektor $\underline{\tilde{m}}(t)$ wyrazić za pomocą wektora \underline{q}_z i jego pochodnych. Weźmy pod uwagę tłumik k połączony z belką w sposób pokazany na Rys. 7.



Rys. 7 Połączenie tłumika k z belką

Przemieszczenia poziome lewego i prawego wspornika, za pośrednictwem których tłumik jest połączony z belką, można obliczyć ze wzorów (porównaj Rys. 7):

$$x_i = -h q_i, \quad x_j = -h q_j, \quad (16)$$

gdzie symbole h , q_i i q_j oznaczają odpowiednio długość wspornika oraz kąt obrotu lewego i prawego przekroju w którym wspornik łączy się z belką.

Siłę $u_k(t)$ działającą w tłumiku k można wyliczyć ze wzoru;

$$u_k(t) = -h(\dot{q}_j - \dot{q}_i). \quad (17)$$

W rozpatrywanym przypadku na belce mamy 3 tłumiki drgań ($k=1,2,3$). Wprowadźmy wektor sił w tłumikach $\underline{u}(t) = \text{col}(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$. Biorąc pod uwagę usytuowanie tłumików na belce można napisać:

$$\underline{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -C_{t1}(\dot{q}_{19} - 0) \\ -C_{t2}(\dot{q}_{26} - \dot{q}_{22}) \\ -C_{t3}(0 - \dot{q}_{29}) \end{Bmatrix} = -\hat{C}_t \underline{E}^T \underline{\dot{q}}_r(t), \quad (18)$$

gdzie

$$\hat{C}_t = \begin{bmatrix} C_{t1} & 0 & 0 \\ 0 & C_{t1} & 0 \\ 0 & 0 & C_{t1} \end{bmatrix} = C_t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\underline{E}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Powyżej symbolem \underline{E} opisano macierz alokacji. Są w niej zawarte informacje o sposobie połączenia tłumików z konstrukcją. Tutaj \underline{E}^T ma wymiar (3×17) .

Momenty wywołane przez siły występujące w tłumikach można teraz obliczyć ze wzorów:

$$M_{19}(t) = +h u_1(t), \quad M_{22}(t) = -h u_2(t), \quad (21)$$

$$M_{26}(t) = +h u_2(t), \quad M_{29}(t) = -h u_3(t). \quad (22)$$

lub korzystając z poniższego wzoru macierzowego

$$\underline{\tilde{m}}(t) = h \underline{E} \underline{u}(t) . \quad (23)$$

Po podstawieniu zależności (18) do wzoru (23) otrzymuje się:

$$\underline{\tilde{m}}(t) = -h \underline{E} \underline{\hat{C}}_t \underline{E}^T \underline{\dot{q}}_r(t) . \quad (24)$$

Należy teraz w równaniu (24) zastąpić wektor $\underline{\dot{q}}_r(t)$ przez $\underline{\dot{q}}_z(t)$. W tym celu korzystamy z zależności (14), którą obustronnie różniczkujemy względem czasu. W rezultacie otrzymuje się zależność:

$$\underline{\dot{q}}_r(t) = -\underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{rz} \underline{\dot{q}}_z - \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{\tilde{m}}(t) . \quad (25)$$

W dalszym ciągu zakładamy, że 2 składnik w zależności (25) jest pomijalnie mały i wobec tego:

$$\underline{\dot{q}}_r(t) \approx -\underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{rz} \underline{\dot{q}}_z . \quad (26)$$

Podstawiając zależność (26) do wzoru (24) otrzymuje się:

$$\underline{\tilde{m}}(t) = h \underline{E} \underline{\hat{C}}_t \underline{E}^T \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{rz} \underline{\dot{q}}_z , \quad (27)$$

a po podstawieniu (27) do równania (15) otrzymuje się następujące równanie:

$$\underline{M}_{zz} \underline{\dot{q}}_z + (\underline{K}_{zz} - \underline{K}_{zr} \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{rz}) \underline{q}_z + h \underline{K}_{zr} \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{E} \underline{\hat{C}}_t \underline{E}^T \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{rz} \underline{\dot{q}}_z + \underline{\tilde{C}}_k \cdot \underline{\dot{q}}_z = \underline{P}_z(t) . \quad (28)$$

W powyższym równaniu uwzględniono dodatkowo składnik $\underline{\tilde{C}}_k \underline{\dot{q}}_z$ reprezentujący siły tłumienia kładki.

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\underline{\tilde{M}} = \underline{M}_{zz} , \quad \underline{\tilde{q}}(t) = \underline{q}_z , \quad \underline{\tilde{K}} = \underline{K}_{zz} - \underline{K}_{zr} \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{rz} , \quad \underline{\tilde{P}}(t) = \underline{P}_z(t) , \quad (29)$$

$$\underline{\tilde{C}}_t = h \underline{K}_{zr} \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{E} \underline{\hat{C}}_t \underline{E}^T \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{rz} , \quad (30)$$

można równanie ruchu (28) przepisać w postaci:

$$\underline{\tilde{M}} \underline{\ddot{q}}(t) + (\underline{\tilde{C}}_k + \underline{\tilde{C}}_t) \underline{\dot{q}}(t) + \underline{\tilde{K}} \underline{q}(t) = \underline{\tilde{P}}(t) . \quad (31)$$

Z porównania równań ruchu kładki bez tłumika i z tłumikiem wynika, że omawiane równanie ruchu kładki różnią się tylko składnikiem $\underline{\tilde{C}}_t \underline{\dot{q}}(t)$ reprezentującym wpływ tłumików wiskotycznych.

2.4 Równania ruchu zapisane za pomocą zmiennych stanu

Równanie ruchu (9) i (31) wygodnie jest zapisać za pomocą zmiennych stanu. Wprowadza się wektor stanu zdefiniowany w następujący sposób: $\underline{z}(t) = \text{col}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t))$. Omawiane równania ruchu, po przyjęciu, że $\underline{\tilde{P}}(t) = \underline{0}$, można zapisać w postaci (patrz [1]):

$$\underline{\dot{z}}(t) = \underline{A} \underline{z}(t) , \quad (32)$$

gdzie \underline{I} jest macierzą jednostkową, a

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{\tilde{M}}^{-1}\underline{\tilde{K}} & -\underline{\tilde{M}}^{-1}\underline{\tilde{C}} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Ponadto $\tilde{C} = \underline{\tilde{C}}_k$ jeżeli rozpatruje się belkę bez tłumików i $\tilde{C} = \underline{\tilde{C}}_k + \underline{\tilde{C}}_t$ jeżeli rozpatruje się belkę z tłumikami wiskotycznymi.

2.5 Wyznaczanie charakterystyk dynamicznych belki

Zazwyczaj przez charakterystyki dynamiczne konstrukcji rozumie się częstości i postacie drgań własnych nietłumionych. Wielkości te wyznacza się rozwiązując problem własny o postaci:

$$(\underline{\tilde{K}} - \omega^2 \underline{\tilde{M}}) \underline{a} = \underline{0}, \quad (34)$$

gdzie symbole ω i \underline{a} oznaczają odpowiednio częstość drgań własnych i wektor własny.

Niekiedy jednak wyznacza się charakterystyki dynamiczne układu na podstawie analizy drgań swobodnych tłumionych. Wyznacza się wtedy częstości drgań swobodnych tłumionych (lub okresy drgań swobodnych tłumionych), postacie drgań i bezwymiarowe współczynniki tłumienia. Ponieważ rozwiązaniem równań ruchu nie są w tym przypadku funkcje okresowe to pod pojęciem okresu drgań własnych tłumionych rozumie się czas trwania jednej oscylacji (porównaj [1]).

Wspomniany wyżej sposób postępowania został zastosowany w niniejszym opracowaniu.

Zajmijmy się teraz wyznaczaniem charakterystyk dynamicznych belki z wbudowanymi tłumikami drgań. Rozwiązanie równania stanu (33) ma postać:

$$\underline{z}(t) = e^{st} \underline{c}, \quad (35)$$

gdzie symbole: s i \underline{c} oznaczają odpowiednio wartość własną i wektor własny.

Podstawiając proponowaną postać rozwiązania (35) do równania (32) otrzymuje się macierzowe równanie algebraiczne o postaci:

$$(\underline{A} - s \underline{I}) \underline{c} = \underline{0}. \quad (36)$$

Rozwiązaniami równania (35) jest $2n$ wartości własnych $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots, s_{2n}$ i $2n$ wektorów własnych $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n, \dots, \underline{c}_{2n}$. Rozwiązań jest dwa razy więcej niż stopni dynamicznej swobody. Wartości własne s_j i wektory własne \underline{c}_j są zazwyczaj liczbami i wektorami zespolonymi, sprzężonymi (jeżeli tłumienie jest podkrytyczne). Jeżeli natomiast tłumienie układu jest nadkrytyczne to co najmniej dwie wartości i dwa wektory własne są liczbami i wektorami rzeczywistymi.

Oznaczmy dwa rozwiązania zespolone, sprzężone w następujący sposób:

$$s_j = \mu_j + i \eta_j, \quad s_{j+n} = \mu_j - i \eta_j, \quad (37)$$

$$\underline{c}_j = \underline{a}_j + i \underline{b}_j, \quad \underline{c}_{j+n} = \underline{a}_j - i \underline{b}_j, \quad (38)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$ jest jednostką urojoną, a $j = 1, 2, \dots, n$ jeżeli wszystkie rozwiązania są zespolone.

Mając dwie wartości własne zespolone, wzajemnie sprzężone s_j oraz s_{j+n} obliczamy częstość drgań własnych tłumionych i bezwymiarowy współczynnik tłumienia ze wzorów (porównaj [1]):

$$\omega_j = \sqrt{\mu_j^2 + \eta_j^2}, \quad \gamma_j = -\frac{\mu_j}{\omega_j}. \quad (39)$$

Jeżeli dwie wartości własne, np. s_j oraz s_{j+n} , są liczbami rzeczywistymi to bezwymiarowy współczynnik tłumienia oblicza się ze wzoru (patrz [1]):

$$\gamma_j = -\frac{s_j + s_{j+n}}{2\omega_j}, \quad \omega_j = \sqrt{s_j s_{j+n}}, \quad . \quad (40)$$

W tym przypadku pojęcie częstości drgań własnych tłumionych traci sens, ponieważ rozwiązanie równania ruchu (32) nie jest funkcją oscylującą, tzn. funkcją, której wartości oscylują wokół pewnej wartości średniej. Omawiane rozwiązanie szczególne równania (32) stowarzyszone z rzeczywistymi wartościami i wektorami własnymi ma postać:

$$\underline{z}(t) = a_j e^{s_j t} \underline{c}_j + a_{j+n} e^{s_{j+n} t} \underline{c}_{j+n}, \quad (41)$$

a stałe a_j i a_{j+n} należy wyznaczyć z warunków początkowych.

W przypadku analizy drgań swobodnych tłumionych interpretacja wektorów własnych różni się od interpretacji wektorów własnych otrzymywanych w trakcie rozwiązywania problemu drgań własnych nietłumionych. Jak wiadomo, w tym ostatnim przypadku elementy wektora własnego można interpretować jako względne przemieszczenia rozpatrywanego układu. Wszystkie punkty układu drgającego równocześnie przechodzą przez położenie równowagi statycznej. Interpretacja wektorów własnych otrzymywanych z rozwiązania problemu własnego (36) jest szczegółowo omówiona w pracy [2].

Jeżeli wartości i wektory własne są rzeczywiste to wektor własny \underline{c}_j można podzielić na dwie części, tzn. $\underline{c}_j = \text{col}(\underline{x}_j, s_j \underline{x}_j)$ (porównaj [1,2]). Wektor \underline{x}_j jest wektorem względnych przemieszczeń, a wektor $s_j \underline{x}_j$ wektorem względnych prędkości. Zgodnie ze wzorem (41) wszystkie przemieszczenia i prędkości rosną lub maleją wraz z upływem czasu w zależności od znaku wartości własnej s_j .

Rozważmy teraz przypadek pary zespolonych i sprzężonych wartości własnych s_j i s_{j+n} . Rozwiązanie równania stanu (35) ma postać (41), ale teraz wielkości w nim występujące są zespolone, parami sprzężone. Biorąc pod uwagę związki (37) i (38) można to rozwiązanie zapisać w postaci :

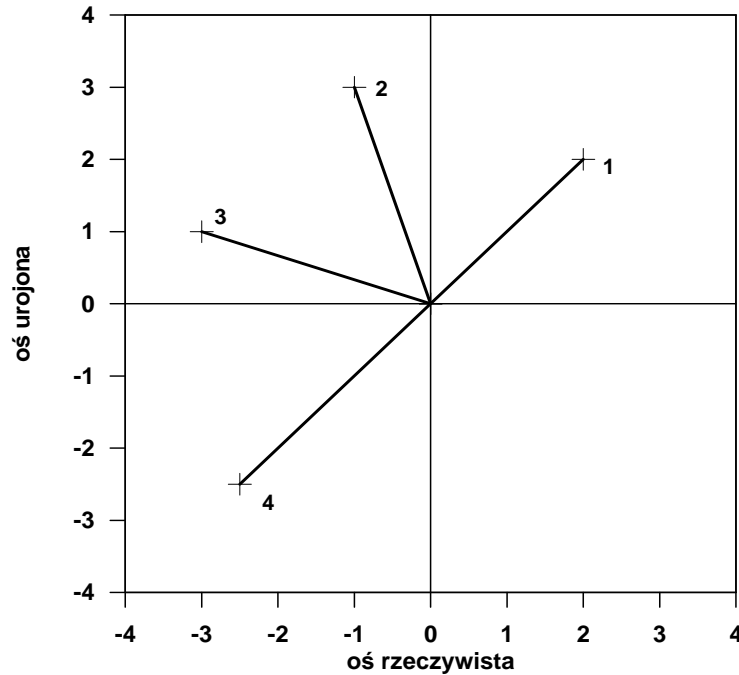
$$\underline{z}(t) = e^{-\mu_j t} (\tilde{a}_j e^{\eta_j t} \underline{c}_j + \tilde{a}_{j+1} e^{-\eta_j t} \underline{c}_{j+n}), \quad (42)$$

gdzie nowe stałe \tilde{a}_j i stałe \tilde{a}_{j+1} są liczbami zespolonymi, sprzężonymi i są wyznaczone z warunków początkowych ruchu.

Jak wynika z rozważań przedstawionych w pracy [2] dowolny, zespolony wektor własny, np. \underline{c}_j , może być przedstawiony graficznie na płaszczyźnie zespolonej. Typowy element tego wektora, np. element o numerze r oznaczony symbolem $c_{i,r} = a_{i,r} + j b_{i,r}$, jest reprezentowany na tej płaszczyźnie przez wektor o współrzędnych $(a_{i,r}, b_{i,r})$ uczepony w początku układu współrzędnych lub punkt o tych samych współrzędnych. Na Rys. 8 przykładowo przedstawiono w ten sposób wektor własny

$$\underline{c} = \text{col}(c_1 = 2 + 2j, c_2 = -1 + 3j, c_3 = -3 + j, c_4 = -2,5 - 2,5j),$$

stowarzyszony z wartością własną : $s = -0,5 + 1,0j$. Na tym rysunku punkty 1, 2, 3, 4 reprezentują odpowiednie składowe omawianego wektora własnego.



Rys. 8 Graficzne przedstawienie przykładowego wektora własnego

3 Omówienie wyników obliczeń

3.1 Dane przyjęte do obliczeń

Podstawowe dane opisujące kładkę są następujące:

- kładka ma rozpiętość $L=48,0$ m,
- dźwigar główny kładki wykonany jest z blachownicy stalowej (rura prostokątna)
- wymiary rury prostokątnej
 - a) zewnętrzne: wysokość $H=1,6$ m, szerokość $B=0,6$ m;
 - b) wewnętrzne: wysokość $h=1,5$ m szerokość $b=0,58$ m,
- wysokość wspornika łączącego tłumik z belką $h=1,5$ m,
- sztywność giętna dźwigara wynosi $EJ = 1,71 \times 10^{10} Nm^2$,
- masa jednostkowa belki jest równa $2152,0$ kg/m,
- masa skupiona jest równa $6456,2$ kg,

3.2 Częstości drgań własnych nietłumionych

W pierwszej kolejności wyznaczono częstości i postacie drgań własnych nietłumionych belki bez tłumików drgań. Wielkości te wyznaczono rozwiązując liniowy problem własny opisany równaniem (34).

Pierwsze sześć częstości drgań własnych nietłumionych belki jest równe:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 12,073 \text{ rad/s} , & \omega_2 &= 48,281 \text{ rad/s} , \\ \omega_3 &= 108,62 \text{ rad/s} , & \omega_4 &= 193,07 \text{ rad/s} , \\ \omega_5 &= 301,52 \text{ rad/s} , & \omega_6 &= 433,74 \text{ rad/s} .\end{aligned}$$

Pozostałe częstości i wektory własne zamieszczono w Dodatku 1.

3.3 Częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia belki bez tłumików

Wyznaczono także częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia belki bez tłumików. Wielkości te wyznaczono rozwiązując liniowy problem własny opisany równaniem (36) i korzystając ze wzorów (39). Macierz tłumienia kładki wyznaczono ze wzoru (8), a współczynniki α i β występujące we wzorze (8) wyznaczono zakładając, że bezwymiarowe współczynniki tłumienia 1 i 2 postaci drgań są równe 0,01. Ponadto $\tilde{C} = \tilde{C}_k$.

Wyniki obliczeń zestawiono w Tabelicy 1 zamieszczonej w Dodatku 2. Tutaj podaje się tylko niektóre z nich. Pierwsze pięć par wartości własnych to:

$$\begin{aligned} s_{1,16} &= -0,1207 \pm 12,073 , & s_{2,17} &= -0,4827 \pm 48,279 , \\ s_{3,18} &= -2,0511 \pm 108,60 , & s_{4,19} &= -6,2713 \pm 192,950 , \\ s_{5,20} &= -15,156 \pm 301,14 , & s_{6,21} &= -31,260 \pm 432,590 . \end{aligned}$$

Części rzeczywiste podanych powyżej wartości własnych różnią się nieco od części rzeczywistych podanych w Tabelicy 1 ponieważ otrzymane za pomocą obliczeń komputerowych wartości własne tworzyły tylko w przybliżeniu pary liczb sprzężonych. Części rzeczywiste wartości własnych podane powyżej są wartościami średnimi odpowiednich części podanych w Tabelicy 1.

Wartości pierwszych trzech częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowych współczynników tłumienia są równe:

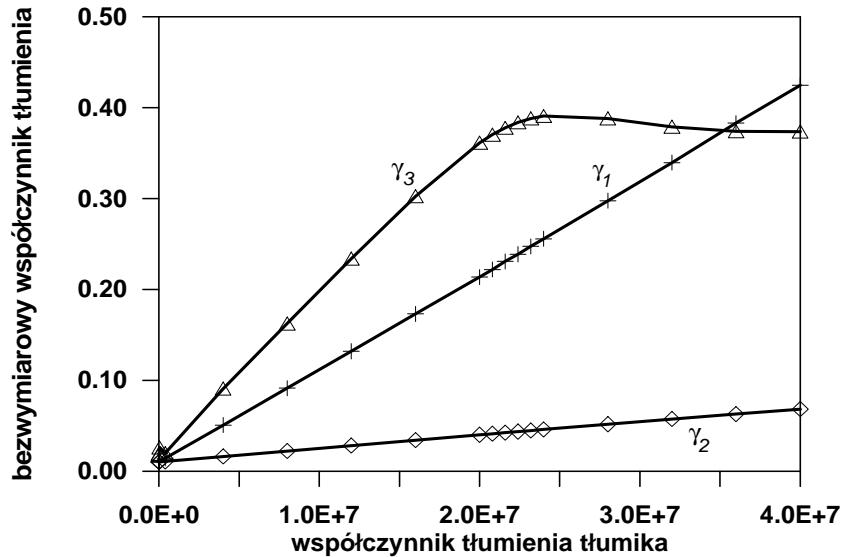
$$\begin{aligned} \omega_1 &= 12,074 \text{ rad/s} , & \gamma_1 &= 0,0100 , \\ \omega_2 &= 48,281 \text{ rad/s} , & \gamma_2 &= 0,0100 , \\ \omega_3 &= 108,62 \text{ rad/s} , & \gamma_3 &= 0,0189 , \\ \omega_4 &= 193,05 \text{ rad/s} , & \gamma_4 &= 0,0325 , \\ \omega_5 &= 301,52 \text{ rad/s} , & \gamma_5 &= 0,0503 , \\ \omega_6 &= 433,72 \text{ rad/s} , & \gamma_6 &= 0,0721 . \end{aligned}$$

Zauważmy, że częstości drgań własnych tłumionych bardzo niewiele różnią się od częstości drgań własnych nietłumionych.

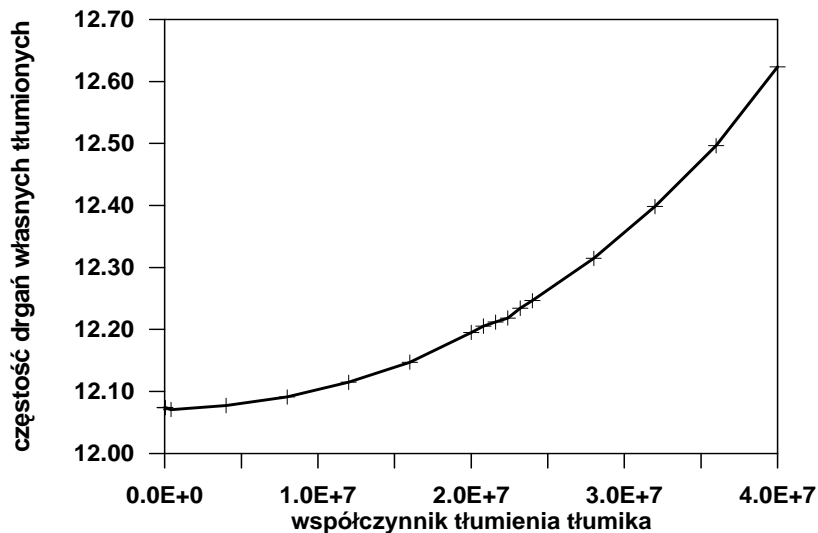
3.4 Częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia belki z tłumikami

Zasadnicza część przeprowadzonej analizy dotyczy charakterystyk dynamicznych belki z tłumikami drgań. Obliczono wartości i wektory własne oraz częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia belki z trzema wiskotycznymi tłumikami drgań. Obliczenia wykonano przyjmując różne wartości współczynników tłumienia tłumików (jednakowe dla wszystkich tłumików). Wyniki obliczeń, tzn. wartości własne, częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia podano w Dodatku 3. W tej części opracowania omówione zostaną najistotniejsze wnioski i spostrzeżenia wynikające z analizy rezultatów obliczeń.

Na Rys. 9 pokazano jak zmieniają się bezwymiarowe współczynniki tłumienia belki z tłumikami w zależności od wartości współczynnika tłumienia. Wykonano obliczenia dla bardzo dużego przedziału wartości współczynnika tłumienia tłumika C_t . Widać, że bezwymiarowe współczynniki tłumienia γ_1 i γ_2 są w badanym przedziale zmienności współczynnika C_t , prawie liniowo rosnącymi funkcjami współczynnika C_t , przy czym tłumienie 2 postaci drgań jest mniejsze niż tłumienie 1 postaci drgań. Zupełnie inny przebieg ma funkcja i $\gamma_3(C_t)$. Dla $C_t \cong 2,4 \times 10^7$ Ns/m osiąga ona wartość maksymalną. Oznacza to, że dalsze zwiększanie wartości tego współczynnika nie zwiększa możliwości tłumienia 3 postaci drgań.



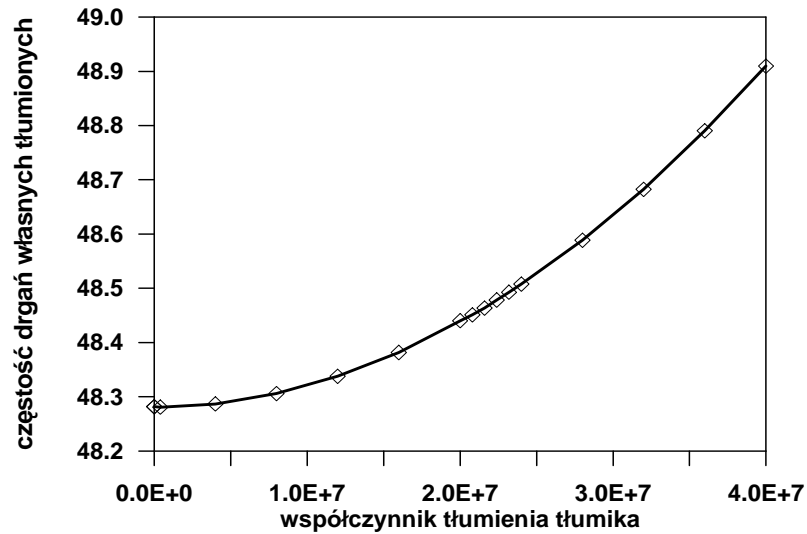
Rys. 9 Zależność bezwymiarowych współczynników tłumienia γ_1 , γ_2 i γ_3 od współczynnika tłumienia tłumika



Rys. 10 Zmiany pierwszej częstości drgań własnych tłumionych w zależności od wartości współczynnika C_t

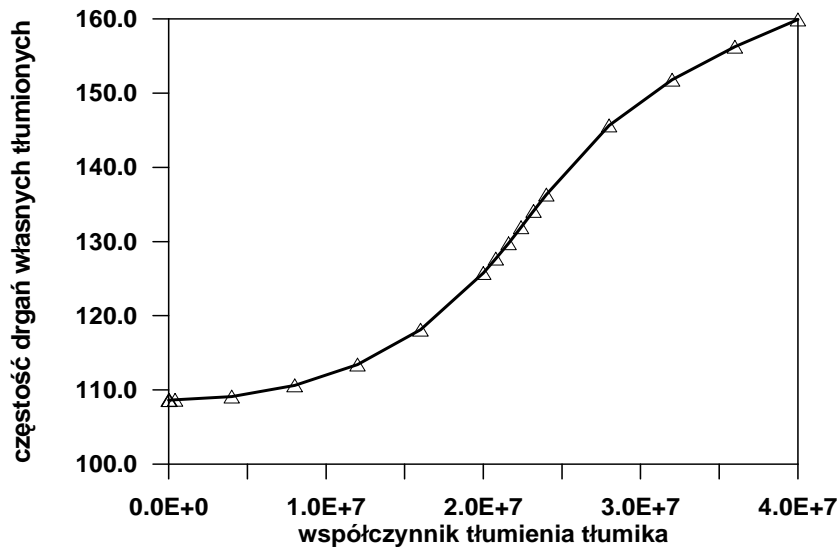
Z kolei na Rys. 10 -12 pokazano w jaki sposób zmieniają się, w zależności od wartości współczynnika C_t , odpowiednio pierwsza, druga i trzecia częstość drgań własnych tłumionych. Widać, że zmiana pierwszej i drugiej częstości drgań własnych tłumionych w stosunku

do częstości drgań własnych nietłumionych jest bardzo mała i nie przekracza 1%.. Ponadto, widać, że wartość trzeciej częstości drgań własnych tłumiących zmienia się w sposób istotny. Różnica między częstością drgań własnych tłumionych i nietłumionych dochodzi do 45%.



Rys. 11 Zmiany drugiej częstości drgań własnych tłumionych w zależności od wartości współczynnika C_t

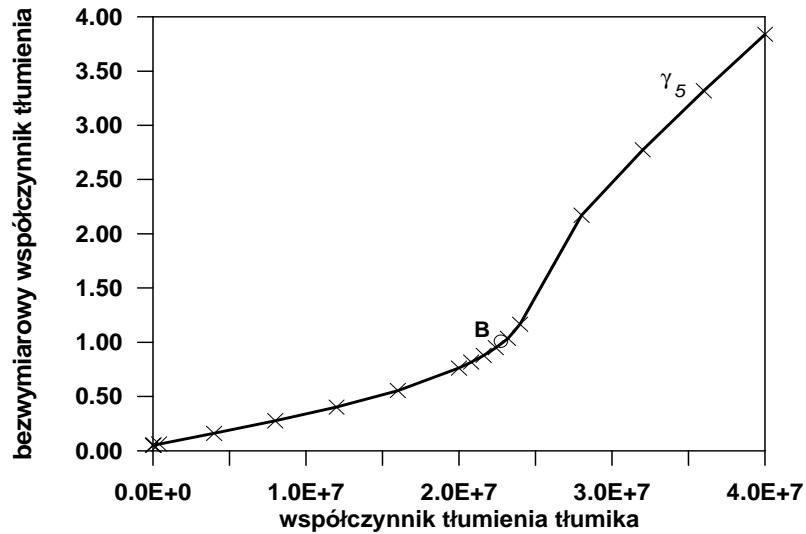
Z przeprowadzonych obliczeń wynika ponadto, że dla wartości współczynnika $C_t > 2,28 \times 10^7 \text{ Ns/m}$ bezwymiarowy współczynnik tłumienia 5 postaci drgań jest większy od 1. Oznacza to, że postać ta jest nadkrytycznie tłumiona o ile $C_t > 2,28 \times 10^7 \text{ Ns/m}$. Wykres funkcji $\gamma_5(C_t)$ pokazano na Rys. 13. Kółkiem i literą B oznaczono na nim granice między tłumieniem podkrytycznym i nadkrytycznym.



Rys. 12 Zmiany trzeciej częstości drgań własnych tłumionych w zależności od wartości współczynnika C_t

Na Rys. 14 pokazano wykres ilustrujący zależność $\omega_5(C_t)$. Wielkość tą należy interpretować jako częstość drgań własnych tłumionych o ile wartości własne $s_5(C_t)$ i $s_{20}(C_t)$ są liczbami zespolonymi, tzn. do punktu B. W tym zakresie wartości omawianej częstości nie-

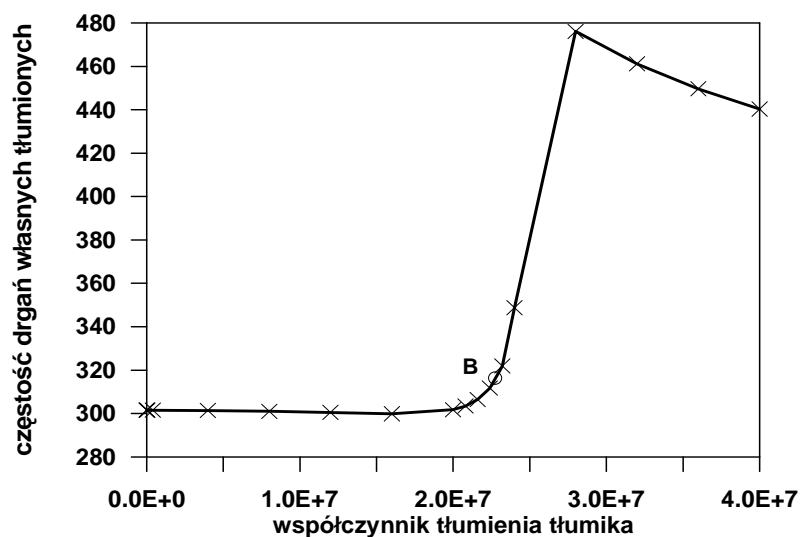
wiele się różnią od piątej częstości drgań własnych nietłumionych (maksymalna różnica wynosi około 5%).



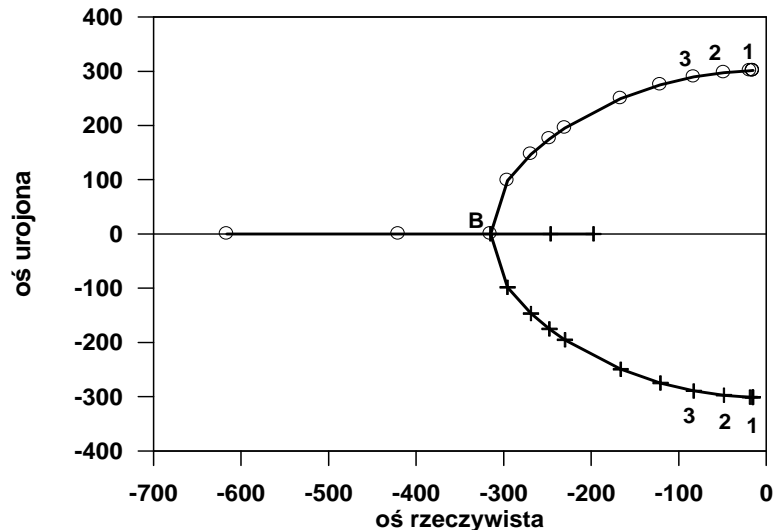
Rys. 13 Zależność bezwymiarowego współczynnika tłumienia γ_5 od współczynnika tłumienia C_t

Na Rys. 15 pokazano z kolei, na płaszczyźnie zespolonej, wykres zmian wartości własnych $s_5(C_t)$ i $s_{20}(C_t)$, przy czym omawiane wartości własne zmieniają swoje położenie zgodnie z numeracją pokazaną na rysunku. Widać, że dwie zespolone, sprzężone wartości własne mają, dla wzrastających wartości współczynnika C_t , coraz to mniejsze części urojone, a krzywe na których rozpatrywane wartości własne leżą łączą się w punkcie bifurkacji oznaczonym symbolem B.

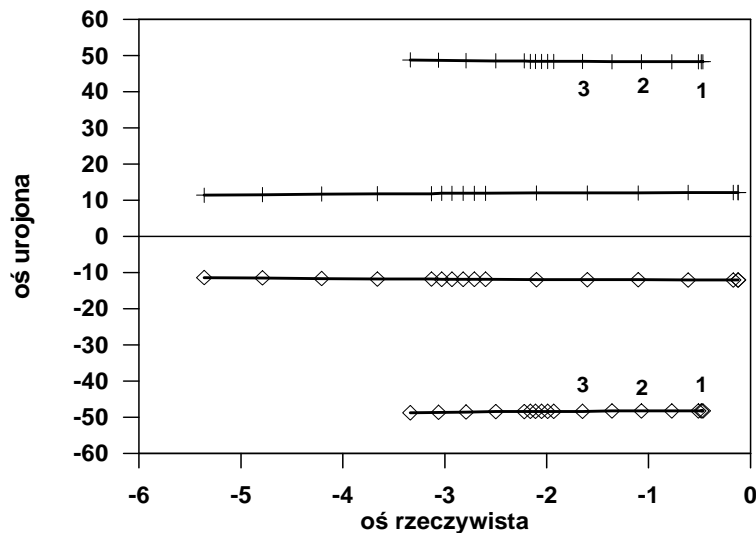
Na Rys. 16 pokazano, na płaszczyźnie zespolonej, jak wraz ze wzrostem wartości współczynnika tłumienia C_t zmienia się położenie 2 pierwszych par wartości własnych, tzn. pary s_1, s_{16} i pary s_2, s_{17} .



Rys 14 Zależność ω_5 od współczynnika tłumienia C_t



Rys. 15 Zmiany położenia piątej i dwudziestej wartości własnej w zależności od wartości współczynnika tłumienia C_t



Rys. 16 Zmiany położenia pierwszej i drugiej pary wartości własnych w zależności od wartości współczynnika tłumienia C_t

Na koniec należy jeszcze poruszyć problem dokładności obliczeń. Z analizy wyników obliczeń wynika, że nie wszystkie zespolone wartości własne są dokładnie liczbami zespolonymi, sprzężonymi. Brak tego sprzężenia wynika z błędów numerycznych jakie powstają w trakcie rozwiązywania problemu własnego (36). Dokładność rozwiązania problemu własnego (36) można sprawdzić wykorzystując dwa twierdzenia (patrz [2]):

- suma wartości własnych jest równa śladowi macierzy \underline{A} ,
- iloczyn wartości własnych jest równy wyznacznikowi macierzy \underline{A} .

4 Uwagi końcowe

W niniejszym opracowaniu omówiono wyniki obliczeń charakterystyk dynamicznych belki z wbudowanymi wiskotycznymi tłumikami drgań. Wykonano obliczenia dla bardzo szeroko-

kiego zakresu wartości współczynnika tłumienia C_t . Zakres zmian tego współczynnika był na tyle duży, że tłumienie 5 postaci drgań stało się nadkrytyczne. Przejście od tłumienia podkrytycznego do tłumienia nadkrytycznego może być zilustrowane na płaszczyźnie zespolonej, a przypadek tłumienia krytycznego odpowiada na tej płaszczyźnie punktowi bifurkacji. W rozważanym przypadku zmiany bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 i 2 postaci drgań są w przybliżeniu liniowymi funkcjami współczynnika C_t . Dla całego rozpatrywanego tutaj zakresu zmian C_t częstości drgań własnych tłumionych stowarzyszone z 1 i 2 parą wartości własnych s_i niewiele różnią się odpowiednio od 1 i 2 częstości drgań własnych nietłumionych.

5 Literatura

- [1] Lewandowski R, *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2006.
- [2] Newland D.E., *Mechanical vibration analysis and computation*, Longman Scientific and Technical, Burnt Mill, 1994.

6 Dodatki

6.1 Dodatek 1 - Częstości i postacie drgań własnych nietłumionych belki

Poniżej zestawiono okresy, częstości i postacie drgań własnych nietłumionych belki bez tłumików.

1 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_1 = 0.5205 \text{ s}$$

$$\omega_1 = 12.0725467136 \text{ rad/s}$$

1	-.8584300E-03
2	-.1683870E-02
3	-.2444598E-02
4	-.3111378E-02
5	-.3658589E-02
6	-.4065203E-02
7	-.4315594E-02
8	-.4400141E-02
9	-.4315594E-02
10	-.4065203E-02
11	-.3658589E-02
12	-.3111378E-02
13	-.2444598E-02
14	-.1683870E-02
15	-.8584300E-03

3 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_3 = 0.0578 \text{ s}$$

$$\omega_3 = 108.623248016 \text{ rad/s}$$

1	.2444588E-02
2	.4065202E-02
3	.4315595E-02
4	.3111370E-02
5	.8584222E-03
6	-.1683869E-02
7	-.3658596E-02
8	-.4400155E-02
9	-.3658596E-02
10	-.1683869E-02
11	.8584222E-03
12	.3111370E-02
13	.4315595E-02
14	.4065202E-02
15	.2444588E-02

2 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_2 = 0.1301 \text{ s}$$

$$\omega_2 = 48.2807036931 \text{ rad/s}$$

1	.1683864E-02
2	.3111375E-02
3	.4065207E-02
4	.4400147E-02
5	.4065205E-02
6	.3111372E-02
7	.1683862E-02
8	.1316212E-14
9	-.1683862E-02
10	-.3111372E-02
11	-.4065205E-02
12	-.4400147E-02
13	-.4065207E-02
14	-.3111375E-02
15	-.1683864E-02

4 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_4 = 0.0325 \text{ s}$$

$$\omega_4 = 193.066677578 \text{ rad/s}$$

1	.3111373E-02
2	.4400145E-02
3	.3111372E-02
4	-.6711554E-09
5	-.3111375E-02
6	-.4400149E-02
7	-.3111375E-02
8	-.5233521E-16
9	.3111375E-02
10	.4400149E-02
11	.3111375E-02
12	.6711553E-09
13	-.3111372E-02
14	-.4400145E-02
15	-.3111373E-02

Charakterystyki dynamiczne belki z tłumikami drgań

5 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_5 = 0.0208 \text{ s}$$

$$\omega_5 = 301.515628244 \text{ rad/s}$$

1	.3658590E-02
2	.4065207E-02
3	.8584272E-03
4	-.3111373E-02
5	-.4315599E-02
6	-.1683865E-02
7	.2444589E-02
8	.4400145E-02
9	.2444589E-02
10	-.1683865E-02
11	-.4315599E-02
12	-.3111373E-02
13	.8584272E-03
14	.4065207E-02
15	.3658590E-02

7 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_7 = 0.0107 \text{ s}$$

$$\omega_7 = 589.211954379 \text{ rad/s}$$

1	-.4315599E-02
2	-.1683863E-02
3	.3658588E-02
4	.3111374E-02
5	-.2444591E-02
6	-.4065206E-02
7	.8584258E-03
8	.4400147E-02
9	.8584258E-03
10	-.4065206E-02
11	-.2444591E-02
12	.3111374E-02
13	.3658588E-02
14	-.1683863E-02
15	-.4315599E-02

6 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_6 = 0.0145 \text{ s}$$

$$\omega_6 = 433.735862532 \text{ rad/s}$$

1	.4065207E-02
2	.3111375E-02
3	-.1683863E-02
4	-.4400147E-02
5	-.1683864E-02
6	.3111373E-02
7	.4065205E-02
8	.9161533E-17
9	-.4065205E-02
10	-.3111373E-02
11	.1683864E-02
12	.4400147E-02
13	.1683863E-02
14	-.3111375E-02
15	-.4065207E-02

8 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_8 = 0.0082 \text{ s}$$

$$\omega_8 = 766.894518131 \text{ rad/s}$$

1	-.4400147E-02
2	.3638706E-09
3	.4400147E-02
4	-.2470694E-09
5	-.4400147E-02
6	-.2884884E-09
7	.4400147E-02
8	-.4706816E-17
9	-.4400147E-02
10	.2884879E-09
11	.4400147E-02
12	.2470708E-09
13	-.4400147E-02
14	-.3638719E-09
15	.4400147E-02

Charakterystyki dynamiczne belki z tłumikami drgań

9 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_9 = 0.0065 \text{ s}$$

$$\omega_9 = 964.769640811 \text{ rad/s}$$

1	.4315599E-02
2	-.1683864E-02
3	-.3658589E-02
4	.3111374E-02
5	.2444591E-02
6	-.4065205E-02
7	-.8584262E-03
8	.4400147E-02
9	-.8584262E-03
10	-.4065205E-02
11	.2444591E-02
12	.3111374E-02
13	-.3658589E-02
14	-.1683864E-02
15	.4315599E-02

11 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_{11} = 0.0045 \text{ s} = T_{11}$$

$$\omega_{11} = 1403.7574042 \text{ rad/s}$$

1	-.3111374E-02
2	.4400147E-02
3	-.3111374E-02
4	.2352582E-09
5	.3111374E-02
6	-.4400147E-02
7	.3111374E-02
8	-.5808699E-16
9	-.3111374E-02
10	.4400147E-02
11	-.3111374E-02
12	-.2352583E-09
13	.3111374E-02
14	-.4400147E-02
15	.3111374E-02

10 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_{10} = 0.0053 \text{ s}$$

$$\omega_{10} = 1179.1685564 \text{ rad/s}$$

1	-.4065206E-02
2	.3111374E-02
3	.1683863E-02
4	-.4400147E-02
5	.1683863E-02
6	.3111374E-02
7	-.4065206E-02
8	.7461056E-16
9	.4065206E-02
10	-.3111374E-02
11	-.1683863E-02
12	.4400147E-02
13	-.1683863E-02
14	-.3111374E-02
15	.4065206E-02

12 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_{12} = 0.0039 \text{ s}$$

$$\omega_{12} = 1628.2834930 \text{ rad/s}$$

1	-.3111374E-02
2	.4400147E-02
3	-.3111374E-02
4	.2352582E-09
5	.3111374E-02
6	-.4400147E-02
7	.3111374E-02
8	-.5808699E-16
9	-.3111374E-02
10	.4400147E-02
11	-.3111374E-02
12	-.2352583E-09
13	.3111374E-02
14	-.4400147E-02
15	.3111374E-02

Charakterystyki dynamiczne belki z tłumikami drgań

13 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_{13} = 0.0034 \text{ s}$$

$$\omega_{13} = 1837.5127846 \text{ rad/s}$$

1	.2444591E-02
2	-.4065206E-02
3	.4315600E-02
4	-.3111374E-02
5	.8584261E-03
6	.1683863E-02
7	-.3658588E-02
8	.4400147E-02
9	-.3658588E-02
10	.1683863E-02
11	.8584261E-03
12	-.3111374E-02
13	.4315600E-02
14	-.4065206E-02
15	.2444591E-02

15 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_{15} = 0.0030 \text{ s}$$

$$\omega_{15} = 2127.9196168 \text{ rad/s}$$

1	.8584260E-03
2	-.1683863E-02
3	.2444590E-02
4	-.3111374E-02
5	.3658588E-02
6	-.4065206E-02
7	.4315600E-02
8	-.4400147E-02
9	.4315600E-02
10	-.4065206E-02
11	.3658588E-02
12	-.3111374E-02
13	.2444590E-02
14	-.1683863E-02
15	.8584260E-03

14 postać drgań

Okres drgań własnych

$$T_{14} = 0.0031 \text{ s}$$

$$\omega_{14} = 2011.3983375 \text{ rad/s}$$

1	-.1683863E-02
2	.3111374E-02
3	-.4065206E-02
4	.4400147E-02
5	-.4065206E-02
6	.3111374E-02
7	-.1683864E-02
8	.5020867E-16
9	.1683864E-02
10	-.3111374E-02
11	.4065206E-02
12	-.4400147E-02
13	.4065206E-02
14	-.3111374E-02
15	.1683863E-02

6.2 Dodatek 2 – Wartości własne, częstotliwości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia belki bez tłumików

Tablica 1 Wartości własne, częstotliwości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia belki bez tłumików

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. wsp. tłumienia)
1	-1.20E-01	-1.21E+01	12.073901	0.00997880
16	-1.21E-01	1.21E+01	12.073906	0.01002029
2	-4.83E-01	4.83E+01	48.281419	0.01001099
17	-4.82E-01	-4.83E+01	48.281407	0.00998459
3	-2.05E+00	1.09E+02	108.622351	0.01887503
18	-2.05E+00	-1.09E+02	108.622385	0.01889141
4	-6.26E+00	-1.93E+02	193.051472	0.03241861
19	-6.28E+00	1.93E+02	193.052306	0.03255154
5	-1.52E+01	3.01E+02	301.519042	0.05025819
20	-1.52E+01	-3.01E+02	301.519318	0.05027638
6	-3.12E+01	4.33E+02	433.716644	0.07203159
21	-3.13E+01	-4.33E+02	433.720430	0.07212019
7	-5.76E+01	5.86E+02	589.211868	0.09776959
22	-5.76E+01	-5.86E+02	589.211888	0.09776992
8	-9.75E+01	-7.61E+02	766.894037	0.12716568
23	-9.75E+01	7.61E+02	766.894050	0.12716581
9	-1.54E+02	9.52E+02	964.769453	0.15991904
24	-1.54E+02	-9.52E+02	964.769453	0.15991904
10	-2.30E+02	1.16E+03	1179.164055	0.19541725
25	-2.30E+02	-1.16E+03	1179.164055	0.19541725
11	-3.27E+02	-1.37E+03	1403.754301	0.23260837
26	-3.27E+02	1.37E+03	1403.754301	0.23260837
12	-4.39E+02	-1.57E+03	1628.279197	0.26979280
27	-4.39E+02	1.57E+03	1628.279197	0.26979280
13	-5.59E+02	1.75E+03	1837.516818	0.30444456
28	-5.59E+02	-1.75E+03	1837.516818	0.30444456
14	-6.70E+02	-1.90E+03	2011.401360	0.33324528
29	-6.70E+02	1.90E+03	2011.401360	0.33324528
15	-7.50E+02	1.99E+03	2127.923689	0.35254507
30	-7.50E+02	-1.99E+03	2127.923689	0.35254507

6.3 Dodatek 3 Wartości własne, częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia postacie belki z tłumikami drgań

Poniżej zestawiono w tablicach wartości własne, częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia obliczone dla belki z wbudowanymi tłumikami drgań obliczone dla różnych wartości współczynnika tłumienia tłumika.

Tablica 2 Wyniki obliczeń dla $C_t = 4\ 000,0\ \text{Ns/m}$

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-1.21E-01	-1.21E+01	12.073607	0.01002327
16	-1.21E-01	1.21E+01	12.073611	0.01005681
2	-4.83E-01	4.83E+01	48.281317	0.01000615
17	-4.83E-01	-4.83E+01	48.281415	0.01000165
3	-2.06E+00	1.09E+02	108.623499	0.01894682
18	-2.06E+00	-1.09E+02	108.623532	0.01896293
4	-6.25E+00	-1.93E+02	193.032126	0.03236487
19	-6.30E+00	1.93E+02	193.033936	0.03265312
5	-1.52E+01	-3.01E+02	301.515840	0.05037679
20	-1.52E+01	3.01E+02	301.515835	0.05037646
6	-3.12E+01	4.33E+02	433.701096	0.07204732
21	-3.13E+01	-4.33E+02	433.705206	0.07217806
7	-5.76E+01	-5.86E+02	589.210252	0.09779361
22	-5.76E+01	5.86E+02	589.211266	0.09779379
8	-9.75E+01	7.61E+02	766.894050	0.12716581
23	-9.75E+01	-7.61E+02	766.895041	0.12716564
9	-1.54E+02	9.52E+02	964.769690	0.15993973
24	-1.54E+02	-9.52E+02	964.769690	0.15993973
10	-2.30E+02	-1.16E+03	1179.170504	0.19544417
25	-2.30E+02	1.16E+03	1179.170504	0.19544417
11	-3.27E+02	1.37E+03	1403.758812	0.23268100
26	-3.27E+02	-1.37E+03	1403.758812	0.23268100
12	-4.39E+02	-1.57E+03	1628.284053	0.26980305
27	-4.39E+02	1.57E+03	1628.284053	0.26980305
13	-5.59E+02	-1.75E+03	1837.511773	0.30447043
28	-5.59E+02	1.75E+03	1837.511773	0.30447043
14	-6.70E+02	-1.90E+03	2011.402026	0.33324616
29	-6.70E+02	1.90E+03	2011.402026	0.33324616
15	-7.50E+02	1.99E+03	2127.915741	0.35254826
30	-7.50E+02	-1.99E+03	2127.915741	0.35254826

Tablica 3 Wyniki obliczeń dla $C_t = 40\ 000.0 \cdot \text{Ns/m}$

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-1.23E-01	1.21E+01	12.073826	0.01018260
16	-1.28E-01	-1.21E+01	12.073882	0.01062649
2	-4.67E-01	4.83E+01	48.334852	0.00965326
17	-5.04E-01	-4.83E+01	48.335930	0.01043247
3	-2.14E+00	-1.09E+02	108.648049	0.01968356
18	-2.12E+00	1.09E+02	108.647691	0.01951519
4	-5.92E+00	1.93E+02	192.989863	0.03068249
19	-6.70E+00	-1.93E+02	193.015359	0.03471786
5	-1.55E+01	-3.01E+02	301.517002	0.05136394
20	-1.55E+01	3.01E+02	301.517728	0.05134623
6	-3.14E+01	4.33E+02	433.735788	0.07241667
21	-3.14E+01	-4.33E+02	433.735788	0.07241667
7	-5.77E+01	-5.86E+02	589.209169	0.09799932
22	-5.77E+01	5.86E+02	589.211601	0.09800656
8	-9.75E+01	7.61E+02	766.894050	0.12716581
23	-9.75E+01	-7.61E+02	766.895080	0.12716603
9	-1.54E+02	9.52E+02	964.767683	0.16013803
24	-1.54E+02	-9.52E+02	964.769844	0.16013249
10	-2.31E+02	-1.16E+03	1179.168573	0.19569127
25	-2.31E+02	1.16E+03	1179.168573	0.19569127
11	-3.28E+02	-1.37E+03	1403.760403	0.23333968
26	-3.28E+02	1.37E+03	1403.760169	0.23333900
12	-4.39E+02	1.57E+03	1628.287634	0.26989826
27	-4.39E+02	-1.57E+03	1628.287634	0.26989826
13	-5.60E+02	-1.75E+03	1837.513742	0.30469486
28	-5.60E+02	1.75E+03	1837.513742	0.30469486
14	-6.70E+02	1.90E+03	2011.399263	0.33325656
29	-6.70E+02	-1.90E+03	2011.399263	0.33325656
15	-7.50E+02	1.99E+03	2127.919428	0.35256504
30	-7.50E+02	-1.99E+03	2127.919428	0.35256504

Tablica 4 Wyniki obliczeń dla $C_t = 400\,000,0 \cdot \text{Ns/m}$

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-1.70E-01	-1.21E+01	12.070700	0.01410192
16	-1.69E-01	1.21E+01	12.070684	0.01400741
2	-5.13E-01	4.83E+01	48.280625	0.01062472
17	-5.12E-01	-4.83E+01	48.280814	0.01060357
3	-2.83E+00	-1.09E+02	108.627891	0.02605951
18	-2.83E+00	1.09E+02	108.627913	0.02606733
4	-6.58E+00	1.93E+02	193.242056	0.03405020
19	-6.76E+00	-1.93E+02	193.248104	0.03495615
5	-1.84E+01	-3.01E+02	301.514331	0.06115398
20	-1.84E+01	3.01E+02	301.514343	0.06115464
6	-3.27E+01	-4.32E+02	433.734052	0.07550272
21	-3.28E+01	4.32E+02	433.734551	0.07551785
7	-5.90E+01	-5.86E+02	589.219480	0.10013467
22	-5.90E+01	5.86E+02	589.219681	0.10013803
8	-9.75E+01	7.61E+02	766.894037	0.12716568
23	-9.75E+01	-7.61E+02	766.894050	0.12716581
9	-1.56E+02	9.52E+02	964.759100	0.16205911
24	-1.56E+02	-9.52E+02	964.759100	0.16205911
10	-2.34E+02	1.16E+03	1179.163577	0.19816165
25	-2.34E+02	-1.16E+03	1179.163577	0.19816165
11	-3.37E+02	-1.36E+03	1403.762705	0.23992730
26	-3.37E+02	1.36E+03	1403.762705	0.23992730
12	-4.41E+02	1.57E+03	1628.267642	0.27086210
27	-4.41E+02	-1.57E+03	1628.267642	0.27086210
13	-5.64E+02	-1.75E+03	1837.422385	0.30695337
28	-5.64E+02	1.75E+03	1837.422385	0.30695337
14	-6.71E+02	-1.90E+03	2011.397593	0.33335279
29	-6.71E+02	1.90E+03	2011.397593	0.33335279
15	-7.51E+02	-1.99E+03	2127.912015	0.35274344
30	-7.51E+02	1.99E+03	2127.912015	0.35274344

Charakterystyki dynamiczne belki z tłumikami drgań

Tablica 5 Wyniki obliczeń dla $C_t = 4\,000\,000,0$ Ns/m

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-6.11E-01	1.21E+01	12.077051	0.05056706
16	-6.13E-01	-1.21E+01	12.080252	0.05072675
2	-7.73E-01	-4.83E+01	48.286590	0.01601167
17	-7.73E-01	4.83E+01	48.289692	0.01601346
3	-9.89E+00	1.09E+02	109.094556	0.09068959
18	-9.89E+00	-1.09E+02	109.094553	0.09068931
4	-1.02E+01	-1.93E+02	193.420974	0.05262097
19	-1.03E+01	1.93E+02	193.426103	0.05321826
5	-4.82E+01	-2.97E+02	301.376335	0.15993260
20	-4.82E+01	2.97E+02	301.375935	0.15992451
6	-4.62E+01	-4.31E+02	433.807944	0.10649459
21	-4.62E+01	4.31E+02	433.810266	0.10654427
7	-7.16E+01	5.86E+02	590.021017	0.12130331
22	-7.16E+01	-5.86E+02	590.021223	0.12130614
8	-9.75E+01	7.61E+02	766.894011	0.12716542
23	-9.75E+01	-7.61E+02	766.895054	0.12716577
9	-1.75E+02	-9.48E+02	963.702602	0.18148545
24	-1.75E+02	9.48E+02	963.702420	0.18148445
10	-2.63E+02	-1.15E+03	1179.147531	0.22298058
25	-2.63E+02	1.15E+03	1179.147531	0.22298058
11	-4.31E+02	-1.34E+03	1405.196265	0.30682049
26	-4.31E+02	1.34E+03	1405.196265	0.30682049
12	-4.57E+02	-1.56E+03	1626.405504	0.28069322
27	-4.57E+02	1.56E+03	1626.405504	0.28069322
13	-6.03E+02	1.73E+03	1827.886119	0.33001509
28	-6.03E+02	-1.73E+03	1827.886119	0.33001509
14	-6.72E+02	-1.90E+03	2011.128653	0.33434460
29	-6.72E+02	1.90E+03	2011.128653	0.33434460
15	-7.54E+02	1.99E+03	2127.326984	0.35456185
30	-7.54E+02	-1.99E+03	2127.326984	0.35456185

Charakterystyki dynamiczne belki z tłumikami drgań

Tablica 6 Wyniki obliczeń dla $C_t = 8\,000\,000,0$ Ns/m

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-1.10E+00	1.20E+01	12.090812	0.09122216
16	-1.10E+00	-1.20E+01	12.090814	0.09122380
2	-1.07E+00	4.83E+01	48.305763	0.02206735
17	-1.07E+00	-4.83E+01	48.305946	0.02205132
3	-1.80E+01	-1.09E+02	110.589416	0.16241880
18	-1.80E+01	1.09E+02	110.589513	0.16242408
4	-1.42E+01	-1.93E+02	193.817219	0.07328864
19	-1.42E+01	1.93E+02	193.817307	0.07329480
5	-8.27E+01	-2.89E+02	300.992435	0.27471455
20	-8.27E+01	2.89E+02	300.992545	0.27471577
6	-6.14E+01	4.30E+02	434.144005	0.14144777
21	-6.14E+01	-4.30E+02	434.143949	0.14144686
7	-8.56E+01	-5.86E+02	592.513669	0.14448983
22	-8.56E+01	5.86E+02	592.513669	0.14448983
8	-9.75E+01	7.61E+02	766.894050	0.12716581
23	-9.75E+01	-7.61E+02	766.895041	0.12716564
9	-1.95E+02	-9.40E+02	960.408443	0.20342907
24	-1.95E+02	9.40E+02	960.408443	0.20342907
10	-2.96E+02	-1.14E+03	1179.210557	0.25129609
25	-2.96E+02	1.14E+03	1179.210557	0.25129609
11	-5.49E+02	1.30E+03	1410.476085	0.38927494
26	-5.49E+02	-1.30E+03	1410.476085	0.38927494
12	-4.73E+02	1.55E+03	1620.453552	0.29176029
27	-4.73E+02	-1.55E+03	1620.453552	0.29176029
13	-6.33E+02	-1.68E+03	1796.681981	0.35216917
28	-6.33E+02	1.68E+03	1796.681981	0.35216917
14	-6.74E+02	1.89E+03	2010.262028	0.33544085
29	-6.74E+02	-1.89E+03	2010.263370	0.33544261
15	-7.58E+02	-1.99E+03	2125.577282	0.35648386
30	-7.58E+02	1.99E+03	2125.577282	0.35648386

Charakterystyki dynamiczne belki z tłumikami drgań

Tablica 7 Wyniki obliczeń dla $C_t = 12\,000\,000,0$ Ns/m

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezw. Wsp. tłumienia)
1	-1.60E+00	-1.20E+01	12.114756	0.13196799
16	-1.60E+00	1.20E+01	12.114888	0.13198719
2	-1.36E+00	-4.83E+01	48.337513	0.02804530
17	-1.36E+00	4.83E+01	48.338903	0.02811090
3	-2.65E+01	1.10E+02	113.395433	0.23367696
18	-2.65E+01	-1.10E+02	113.395985	0.23365995
4	-1.82E+01	-1.94E+02	194.778540	0.09335063
19	-1.82E+01	1.94E+02	194.778559	0.09335165
5	-1.21E+02	2.75E+02	300.422208	0.40146499
20	-1.21E+02	-2.75E+02	300.479244	0.40186137
6	-7.71E+01	4.28E+02	434.758224	0.17743126
21	-7.71E+01	-4.28E+02	434.758206	0.17743104
7	-9.98E+01	-5.88E+02	596.857207	0.16713328
22	-9.98E+01	5.88E+02	596.857040	0.16713165
8	-9.75E+01	7.61E+02	766.894050	0.12716581
23	-9.75E+01	-7.61E+02	766.895105	0.12716628
9	-2.16E+02	9.30E+02	954.620707	0.22578810
24	-2.16E+02	-9.30E+02	954.620707	0.22578810
10	-3.32E+02	-1.13E+03	1179.478318	0.28127350
25	-3.32E+02	1.13E+03	1179.478318	0.28127350
11	-6.93E+02	1.23E+03	1408.651654	0.49162971
26	-6.93E+02	-1.23E+03	1408.652637	0.49163078
12	-4.87E+02	1.53E+03	1609.952174	0.30243134
27	-4.87E+02	-1.53E+03	1609.952174	0.30243134
13	-6.34E+02	1.64E+03	1754.570910	0.36121025
28	-6.34E+02	-1.64E+03	1754.570910	0.36121025
14	-6.76E+02	-1.89E+03	2008.789995	0.33643636
29	-6.76E+02	1.89E+03	2008.789995	0.33643636
15	-7.60E+02	-1.98E+03	2123.019633	0.35814648
30	-7.60E+02	1.98E+03	2123.019633	0.35814648

Tablica 8 Wyniki obliczeń dla $C_t = 16\,000\,000,0$ Ns/m

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	ν_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-2.10E+00	1.20E+01	12.147207	0.17292946
16	-2.10E+00	-1.20E+01	12.147207	0.17292946
2	-1.65E+00	-4.84E+01	48.381577	0.03400261
17	-1.65E+00	4.84E+01	48.382360	0.03405270
3	-3.57E+01	1.13E+02	118.102370	0.30245202
18	-3.57E+01	-1.13E+02	118.101947	0.30244125
4	-2.22E+01	-1.95E+02	196.159210	0.11299138
19	-2.22E+01	1.95E+02	196.159199	0.11299088
5	-1.66E+02	-2.50E+02	299.812227	0.55402344
20	-1.66E+02	2.50E+02	299.812227	0.55402344
6	-9.37E+01	-4.26E+02	435.790226	0.21511313
21	-9.37E+01	4.26E+02	435.790720	0.21511816
7	-1.14E+02	-5.92E+02	603.311826	0.18883104
22	-1.14E+02	5.92E+02	603.312770	0.18883903
8	-9.71E+01	7.60E+02	766.484054	0.12670022
23	-9.79E+01	-7.60E+02	766.588048	0.12774932
9	-2.35E+02	9.16E+02	945.857111	0.24853860
24	-2.35E+02	-9.16E+02	945.858080	0.24853834
10	-3.71E+02	-1.12E+03	1179.784073	0.31416427
25	-3.71E+02	1.12E+03	1179.784388	0.31416503
11	-8.40E+02	-1.08E+03	1372.148054	0.61220143
26	-8.40E+02	1.08E+03	1372.147442	0.61220097
12	-4.97E+02	1.51E+03	1594.479646	0.31185974
27	-4.97E+02	-1.51E+03	1594.479334	0.31185917
13	-6.24E+02	-1.61E+03	1727.936735	0.36112665
28	-6.24E+02	1.61E+03	1727.937819	0.36112816
14	-6.77E+02	-1.89E+03	2006.841469	0.33722345
29	-6.77E+02	1.89E+03	2006.842143	0.33722433
15	-7.62E+02	1.98E+03	2119.928375	0.35954988
30	-7.62E+02	-1.98E+03	2119.928015	0.35954947

Charakterystyki dynamiczne belki z tłumikami drgań

Tablica 9 Wyniki obliczeń dla $C_t = 20\,000\,000,0$ Ns/m

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwy. Wsp. tłumienia)
1	-2.60E+00	1.19E+01	12.195006	0.21339720
16	-2.62E+00	-1.19E+01	12.197611	0.21476091
2	-1.93E+00	-4.84E+01	48.440160	0.03984112
17	-1.93E+00	4.84E+01	48.443501	0.03991247
3	-4.54E+01	1.17E+02	125.736511	0.36119660
18	-4.54E+01	-1.17E+02	125.740747	0.36119556
4	-2.61E+01	1.96E+02	197.997353	0.13199318
19	-2.61E+01	-1.96E+02	197.997340	0.13199268
5	-2.30E+02	-1.95E+02	301.695295	0.76212657
20	-2.30E+02	1.95E+02	301.695295	0.76212657
6	-1.12E+02	-4.23E+02	437.478959	0.25527171
21	-1.12E+02	4.23E+02	437.479214	0.25527384
7	-1.28E+02	-5.99E+02	612.190577	0.20884510
22	-1.28E+02	5.99E+02	612.190577	0.20884510
8	-9.75E+01	7.61E+02	766.895041	0.12716564
23	-9.75E+01	-7.61E+02	766.895016	0.12716539
9	-2.53E+02	8.98E+02	933.343520	0.27144561
24	-2.53E+02	-8.98E+02	933.345173	0.27144406
10	-4.15E+02	-1.10E+03	1179.265535	0.35173503
25	-4.15E+02	1.10E+03	1179.265184	0.35173429
11	-9.65E+02	8.54E+02	1288.584340	0.74855713
26	-9.65E+02	-8.54E+02	1288.584340	0.74855713
12	-5.02E+02	1.49E+03	1574.210842	0.31868984
27	-5.02E+02	-1.49E+03	1574.220002	0.31868735
13	-6.21E+02	-1.60E+03	1711.963242	0.36248792
28	-6.21E+02	1.60E+03	1711.963242	0.36248792
14	-6.77E+02	-1.89E+03	2004.601460	0.33773995
29	-6.77E+02	1.89E+03	2004.601460	0.33773995
15	-7.63E+02	1.97E+03	2116.377259	0.36068380
30	-7.63E+02	-1.97E+03	2116.377259	0.36068380

Charakterystyki dynamiczne belki z tłumikami drgań

Tablica 10 Wyniki obliczeń dla $C_t = 20\,800\,000,0 \cdot \text{Ns/m}$

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezw. Wsp. tłumienia)
1	-2.71E+00	1.19E+01	12.205102	0.22176382
16	-2.72E+00	-1.19E+01	12.210855	0.22291642
2	-1.99E+00	-4.84E+01	48.450683	0.04102151
17	-1.99E+00	4.84E+01	48.458000	0.04097672
3	-4.73E+01	1.19E+02	127.688008	0.37020078
18	-4.73E+01	-1.19E+02	127.694170	0.37021502
4	-2.69E+01	1.97E+02	198.424147	0.13568963
19	-2.69E+01	-1.97E+02	198.424215	0.13569211
5	-2.48E+02	1.75E+02	303.432561	0.81644501
20	-2.48E+02	-1.75E+02	303.432561	0.81644501
6	-1.15E+02	-4.22E+02	437.919794	0.26368756
21	-1.15E+02	4.22E+02	437.919794	0.26368756
7	-1.31E+02	6.00E+02	614.280257	0.21254305
22	-1.31E+02	-6.00E+02	614.280257	0.21254305
8	-9.75E+01	-7.61E+02	766.894011	0.12716542
23	-9.75E+01	7.61E+02	766.894050	0.12716581
9	-2.57E+02	-8.94E+02	930.299819	0.27599167
24	-2.57E+02	8.94E+02	930.299819	0.27599167
10	-4.24E+02	1.10E+03	1178.892671	0.36000139
25	-4.24E+02	-1.10E+03	1178.892671	0.36000139
11	-9.84E+02	-7.91E+02	1262.964539	0.77941460
26	-9.84E+02	7.91E+02	1262.965318	0.77941491
12	-5.02E+02	1.49E+03	1569.699334	0.31958604
27	-5.02E+02	-1.49E+03	1569.699334	0.31958604
13	-6.20E+02	-1.59E+03	1709.091868	0.36303490
28	-6.20E+02	1.59E+03	1709.091868	0.36303490
14	-6.77E+02	-1.89E+03	2004.133841	0.33780928
29	-6.77E+02	1.89E+03	2004.133841	0.33780928
15	-7.63E+02	1.97E+03	2115.622080	0.36087400
30	-7.63E+02	-1.97E+03	2115.622080	0.36087400

Tablica 11 Wyniki obliczeń dla $C_t = 21\,600\,000,0 \text{ Ns/m}$

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-2.82E+00	1.19E+01	12.211716	0.23066700
16	-2.82E+00	-1.19E+01	12.212469	0.23071257
2	-2.05E+00	-4.84E+01	48.463388	0.04225644
17	-2.05E+00	4.84E+01	48.464691	0.04225736
3	-4.90E+01	-1.20E+02	129.765050	0.37773961
18	-4.90E+01	1.20E+02	129.768204	0.37781366
4	-2.77E+01	-1.97E+02	198.871291	0.13934792
19	-2.77E+01	1.97E+02	198.870998	0.13933756
5	-2.69E+02	1.47E+02	306.432017	0.87775423
20	-2.69E+02	-1.47E+02	306.432017	0.87775423
6	-1.19E+02	-4.22E+02	438.402934	0.27224955
21	-1.19E+02	4.22E+02	438.402934	0.27224955
7	-1.33E+02	6.02E+02	616.477965	0.21610991
22	-1.33E+02	-6.02E+02	616.477965	0.21610991
8	-9.75E+01	-7.61E+02	766.894050	0.12716581
23	-9.75E+01	7.61E+02	766.895041	0.12716564
9	-2.60E+02	8.90E+02	927.048969	0.28050622
24	-2.60E+02	-8.90E+02	927.048969	0.28050622
10	-4.34E+02	1.10E+03	1178.352682	0.36856283
25	-4.34E+02	-1.10E+03	1178.352682	0.36856283
11	-1.00E+03	-7.18E+02	1231.974574	0.81244371
26	-1.00E+03	7.18E+02	1231.974574	0.81244371
12	-5.01E+02	-1.48E+03	1565.089779	0.32029025
27	-5.01E+02	1.48E+03	1565.090099	0.32029083
13	-6.20E+02	1.59E+03	1706.224911	0.36364901
28	-6.20E+02	-1.59E+03	1706.224911	0.36364901
14	-6.77E+02	1.89E+03	2003.677286	0.33786529
29	-6.77E+02	-1.89E+03	2003.677286	0.33786529
15	-7.64E+02	-1.97E+03	2114.855435	0.36105116
30	-7.64E+02	1.97E+03	2114.855074	0.36105074

Tablica 12 Wyniki obliczeń dla $C_t = 22\,400\,000,0 \text{ Ns/m}$

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-2,91E+00	-1,19E+01	12,218347	0,23855192
16	-2,93E+00	1,19E+01	12,221342	0,24855199
2	-2,11E+00	-4,84E+01	48,478328	0,04348446
17	-2,11E+00	4,84E+01	48,478428	0,04348457
3	-5,06E+01	-1,22E+02	131,925014	0,38379450
18	-5,06E+01	1,22E+02	131,925860	0,41632936
4	-2,85E+01	1,97E+02	199,336514	0,14449735
19	-2,85E+01	-1,97E+02	199,337589	0,14449966
5	-2,96E+02	9,85E+01	311,714324	0,94877570
20	-2,96E+02	-9,85E+01	311,714324	0,9487757
6	-1,23E+02	-4,21E+02	438,933704	0,29286479
21	-1,23E+02	4,21E+02	438,933704	0,29286479
7	-1,36E+02	-6,04E+02	618,781366	0,22506622
22	-1,36E+02	6,04E+02	618,781366	0,22506622
8	-9,75E+01	-7,61E+02	766,894050	0,12821746
23	-9,75E+01	7,61E+02	766,895016	0,12821703
9	-2,63E+02	8,85E+02	923,583665	0,29735352
24	-2,63E+02	-8,85E+02	923,583950	0,29735465
10	-4,44E+02	1,09E+03	1177,620532	0,40765514
25	-4,44E+02	-1,09E+03	1177,620532	0,40765514
11	-1,01E+03	-6,31E+02	1192,638576	0,848092660
26	-1,01E+03	6,31E+02	1192,640163	0,848092660
12	-5,01E+02	1,48E+03	1560,407306	0,33872915
27	-5,01E+02	-1,48E+03	1560,417099	0,33872754
13	-6,21E+02	1,59E+03	1703,342370	0,39125094
28	-6,21E+02	-1,59E+03	1703,342734	0,39125157
14	-6,77E+02	1,89E+03	2003,213641	0,35906526
29	-6,77E+02	-1,89E+03	2003,213303	0,35906473
15	-7,64E+02	-1,97E+03	2114,076585	0,38740656
30	-7,64E+02	1,97E+03	2114,075863	0,38740554

Uwaga: wartości własne s_5 i s_{20} są po raz ostatni liczbami zespolonymi – otoczenie punktu bifurkacji krzywych $s_5(c_t)$ i $s_{20}(c_t)$.

Tablica 13 Wyniki obliczeń dla $C_t = 23\,200\,000,0 \cdot \text{Ns/m}$

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	ν_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-3.02E+00	-1.19E+01	12.234111	0.24723823
16	-3.03E+00	1.19E+01	12.234431	0.24730533
2	-2.16E+00	4.84E+01	48.492626	0.04458699
17	-2.16E+00	-4.84E+01	48.492862	0.04460388
3	-5.21E+01	-1.24E+02	134.130088	0.38812843
18	-5.21E+01	1.24E+02	134.130049	0.38812779
4	-2.93E+01	-1.98E+02	199.824932	0.14653227
19	-2.93E+01	1.98E+02	199.825775	0.14652664
5	-2.46E+02	-1.73E-03	321.434290	1.152647200
20	-4.20E+02	-1.19E-05	321.434290	1.152647200
6	-1.27E+02	-4.21E+02	439.501779	0.28981908
21	-1.27E+02	4.21E+02	439.514533	0.28991078
7	-1.38E+02	-6.06E+02	621.189116	0.22280010
22	-1.38E+02	6.06E+02	621.189338	0.22280163
8	-9.75E+01	-7.61E+02	766.900713	0.12717200
23	-9.75E+01	7.61E+02	766.901183	0.12715641
9	-2.66E+02	-8.81E+02	919.891557	0.28938846
24	-2.66E+02	8.81E+02	919.892893	0.28938586
10	-1.01E+03	5.18E+02	1137.652139	0.89045673
25	-1.01E+03	-5.18E+02	1137.653049	0.89045601
11	-4.55E+02	1.09E+03	1176.640491	0.38662786
26	-4.55E+02	-1.09E+03	1176.649714	0.38662483
12	-5.00E+02	-1.47E+03	1555.718635	0.32107348
27	-5.00E+02	1.47E+03	1555.718635	0.32107348
13	-6.21E+02	1.58E+03	1700.426019	0.36502911
28	-6.21E+02	-1.58E+03	1700.426019	0.36502911
14	-6.77E+02	-1.88E+03	2002.751640	0.33794705
29	-6.77E+02	1.88E+03	2002.751640	0.33794705
15	-7.64E+02	1.97E+03	2113.285875	0.36136427
30	-7.64E+02	-1.97E+03	2113.285875	0.36136427

Uwaga: wartości własne s_5 i s_{20} są po raz pierwszy liczbami rzeczywistymi – otoczenie punktu bifurkacji krzywych $s_5(c_t)$ i $s_{20}(c_t)$.

Charakterystyki dynamiczne belki z tłumikami drgań

Tablica 14 Wyniki obliczeń dla $C_t = 24\ 000\ 000,0\ \text{Ns/m}$

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-3.13E+00	1.18E+01	12.246218	0.25560953
16	-3.13E+00	-1.18E+01	12.246257	0.25565199
2	-2.22E+00	4.85E+01	48.507699	0.04575336
17	-2.22E+00	-4.85E+01	48.507801	0.04575408
3	-5.33E+01	-1.25E+02	136.320599	0.39083088
18	-5.33E+01	1.25E+02	136.322518	0.39082685
4	-3.00E+01	-1.98E+02	200.354676	0.14996256
19	-3.00E+01	1.98E+02	200.374388	0.14987993
5	-1.97E+02	-2.21E-03	348.356140	1.16690940
20	-6.16E+02	-2.96E-03	348.3561400	1.16690940
6	-1.32E+02	4.20E+02	440.152055	0.29896714
21	-1.32E+02	-4.20E+02	440.174785	0.29897215
7	-1.41E+02	-6.08E+02	623.704177	0.22588433
22	-1.41E+02	6.08E+02	623.708681	0.22589392
8	-9.75E+01	7.61E+02	766.891557	0.12716100
23	-9.75E+01	-7.61E+02	766.892587	0.12717139
9	-2.69E+02	8.76E+02	915.965515	0.29371521
24	-2.69E+02	-8.76E+02	915.965515	0.29371521
10	-9.78E+02	-3.36E+02	1034.485981	0.94586105
25	-9.78E+02	3.36E+02	1034.485981	0.94586105
11	-4.66E+02	1.08E+03	1175.382623	0.39614930
26	-4.66E+02	-1.08E+03	1175.382623	0.39614930
12	-4.98E+02	-1.47E+03	1551.029381	0.32112867
27	-4.98E+02	1.47E+03	1551.037731	0.32114370
13	-6.21E+02	-1.58E+03	1697.449010	0.36577711
28	-6.21E+02	1.58E+03	1697.447547	0.36577507
14	-6.77E+02	1.88E+03	2002.302382	0.33797093
29	-6.77E+02	-1.88E+03	2002.302382	0.33797093
15	-7.64E+02	-1.97E+03	2112.483290	0.36150061
30	-7.64E+02	1.97E+03	2112.483290	0.36150061

Tablica 15 Wyniki obliczeń dla $C_t = 28\,000\,000,0$ Ns/m

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-3.66E+00	-1.18E+01	12.314636	0.29751346
16	-3.66E+00	1.18E+01	12.314704	0.29753049
2	-2.50E+00	-4.85E+01	48.588486	0.05150335
17	-2.50E+00	4.85E+01	48.588594	0.05154667
3	-5.65E+01	-1.34E+02	145.645156	0.38803625
18	-5.65E+01	1.34E+02	145.645156	0.38803625
4	-3.39E+01	2.00E+02	203.236621	0.16660875
19	-3.39E+01	-2.00E+02	203.240315	0.16659834
5	-1.16E+02	0.00E+00	475.604880	2.17197100
20	-1.95E+03	-3.98E-06	475.604880	2.17197100
6	-1.54E+02	-4.17E+02	444.509206	0.34744162
21	-1.54E+02	4.17E+02	444.513894	0.34743796
7	-1.52E+02	-6.19E+02	637.575437	0.23822906
22	-1.52E+02	6.19E+02	637.581394	0.23826605
8	-5.55E+02	-4.53E+02	716.096853	0.77482396
23	-5.55E+02	4.53E+02	716.096853	0.77482396
9	-9.75E+01	-7.61E+02	766.894050	0.12716581
24	-9.75E+01	7.61E+02	766.895029	0.12716551
10	-2.80E+02	8.48E+02	892.533322	0.31321856
25	-2.80E+02	-8.48E+02	892.533322	0.31321856
11	-5.22E+02	1.04E+03	1162.780608	0.44867707
26	-5.22E+02	-1.04E+03	1162.781057	0.44867776
12	-4.87E+02	-1.45E+03	1529.565754	0.31830603
27	-4.87E+02	1.45E+03	1529.564799	0.31830427
13	-6.22E+02	-1.56E+03	1681.431542	0.36964633
28	-6.22E+02	1.56E+03	1681.441573	0.36964531
14	-6.76E+02	1.88E+03	2000.149744	0.33794870
29	-6.76E+02	-1.88E+03	2000.151096	0.33795047
15	-7.63E+02	-1.97E+03	2108.447839	0.36196200
30	-7.63E+02	1.97E+03	2108.448925	0.36196324

Charakterystyki dynamiczne belki z tłumikami drgań

Tablica 16 Wyniki obliczeń dla $C_t = 32\,000\,000,0$ Ns/m

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezw. Wsp. tłumienia)
1	-4.21E+00	1.17E+01	12.398277	0.33934231
16	-4.22E+00	-1.17E+01	12.401503	0.34059905
2	-2.79E+00	4.86E+01	48.682375	0.05722482
17	-2.78E+00	-4.86E+01	48.684798	0.05712420
3	-5.75E+01	-1.40E+02	151.811484	0.37893312
18	-5.75E+01	1.40E+02	151.811484	0.37893312
4	-3.74E+01	2.03E+02	206.679692	0.18105214
19	-3.74E+01	-2.03E+02	206.679960	0.18116415
5	-8.61E+01	0.00E+00	461.158320	2.77139090
20	-2.47E+03	7.14E-09	461.158320	2.77139090
6	-1.82E+02	4.14E+02	451.784198	0.40265242
21	-1.82E+02	-4.14E+02	451.792179	0.40267408
7	-1.60E+02	6.33E+02	652.559983	0.24453844
22	-1.60E+02	-6.33E+02	652.587499	0.24461547
8	-5.30E+02	4.88E+02	720.644104	0.73538519
23	-5.30E+02	-4.88E+02	720.657588	0.73541861
9	-9.75E+01	7.61E+02	766.894914	0.12716436
24	-9.75E+01	-7.61E+02	766.895868	0.12716381
10	-2.81E+02	8.16E+02	863.387530	0.32547378
25	-2.81E+02	-8.16E+02	863.389452	0.32547653
11	-5.77E+02	9.78E+02	1135.188565	0.50817725
26	-5.77E+02	-9.78E+02	1135.189581	0.50817855
12	-4.72E+02	-1.44E+03	1514.179127	0.31202913
27	-4.72E+02	1.44E+03	1514.179127	0.31202913
13	-6.20E+02	1.54E+03	1663.314064	0.37293258
28	-6.20E+02	-1.54E+03	1663.314810	0.37293361
14	-6.75E+02	1.88E+03	1998.271273	0.33774243
29	-6.75E+02	-1.88E+03	1998.271273	0.33774243
15	-7.62E+02	1.96E+03	2104.489086	0.36207173
30	-7.62E+02	-1.96E+03	2104.489086	0.36207173

Tablica 17 Wyniki obliczeń dla $C_t = 36\,000\,000,0$ Ns/m

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-4.79E+00	1.15E+01	12.496529	0.38291273
16	-4.79E+00	-1.15E+01	12.497022	0.38302004
2	-3.06E+00	4.87E+01	48.790248	0.06278140
17	-3.06E+00	-4.87E+01	48.790375	0.06275746
3	-5.84E+01	-1.45E+02	156.233193	0.37398647
18	-5.84E+01	1.45E+02	156.233193	0.37398647
4	-4.07E+01	-2.07E+02	210.692159	0.19299722
19	-4.07E+01	2.07E+02	210.705948	0.19293760
5	-6.94E+01	0.00E+00	449.392920	3.23034390
20	-2.91E+03	-1.89E-04	449.392920	3.23034390
6	-2.17E+02	4.11E+02	464.846276	0.46698664
21	-2.17E+02	-4.11E+02	464.859490	0.46696906
7	-1.63E+02	6.47E+02	666.869165	0.24501808
22	-1.63E+02	-6.47E+02	666.869165	0.24501808
8	-5.56E+02	-4.77E+02	732.226602	0.75895768
23	-5.56E+02	4.77E+02	732.226602	0.75895768
9	-9.75E+01	7.61E+02	766.894050	0.12716581
24	-9.75E+01	-7.61E+02	766.894940	0.12716462
10	-2.72E+02	-7.88E+02	833.502786	0.32575056
25	-2.72E+02	7.88E+02	833.503405	0.32574912
11	-6.24E+02	8.91E+02	1087.452800	0.57355041
26	-6.24E+02	-8.91E+02	1087.464105	0.57354813
12	-4.59E+02	-1.43E+03	1504.918566	0.30513013
27	-4.59E+02	1.43E+03	1504.926258	0.30512459
13	-6.16E+02	-1.52E+03	1643.608860	0.37470837
28	-6.16E+02	1.52E+03	1643.609609	0.37470942
14	-6.74E+02	-1.88E+03	1996.716822	0.33741690
29	-6.74E+02	1.88E+03	1996.716822	0.33741690
15	-7.60E+02	1.96E+03	2100.816699	0.36187165
30	-7.60E+02	-1.96E+03	2100.816699	0.36187165

Charakterystyki dynamiczne belki z tłumikami drgań

Tablica 18 Wyniki obliczeń dla $C_t = 40\,000\,000,0 \text{ Ns/m}$

Numer wartości własnej	μ_j (Real)	η_j (Image)	ω_j (częstość drgań własnych)	γ_j (bezwym. Wsp. tłumienia)
1	-5.36E+00	1.14E+01	12.623471	0.42479442
16	-5.40E+00	-1.14E+01	12.641156	0.42736598
2	-3.34E+00	-4.88E+01	48.909412	0.06824024
17	-3.34E+00	4.88E+01	48.910159	0.06825392
3	-5.97E+01	-1.48E+02	159.935693	0.37351825
18	-5.97E+01	1.48E+02	159.935693	0.37351825
4	-4.33E+01	-2.11E+02	215.121159	0.20122195
19	-4.33E+01	2.11E+02	215.122963	0.20123933
5	-5.84E+01	0.00E+00	440.327150	3.83623860
20	-3.32E+03	7.17E-07	440.327150	3.83623860
6	-2.67E+02	-4.12E+02	491.160009	0.54402230
21	-2.67E+02	4.12E+02	491.164066	0.54403613
7	-1.64E+02	-6.59E+02	679.144023	0.24151725
22	-1.64E+02	6.59E+02	679.144023	0.24151725
8	-6.09E+02	4.23E+02	741.311949	0.82140859
23	-6.09E+02	-4.23E+02	741.316946	0.82140845
9	-9.75E+01	-7.61E+02	766.894050	0.12716581
24	-9.75E+01	7.61E+02	766.895041	0.12716564
10	-2.56E+02	-7.68E+02	809.737606	0.31591098
25	-2.56E+02	7.68E+02	809.740452	0.31591357
11	-6.54E+02	7.69E+02	1009.628089	0.64752061
26	-6.54E+02	-7.69E+02	1009.639366	0.64752131
12	-4.48E+02	-1.43E+03	1499.651902	0.29897338
27	-4.48E+02	1.43E+03	1499.655166	0.29895873
13	-6.08E+02	1.51E+03	1623.581079	0.37439030
28	-6.08E+02	-1.51E+03	1623.581079	0.37439030
14	-6.73E+02	1.88E+03	1995.476647	0.33702875
29	-6.73E+02	-1.88E+03	1995.476310	0.33702831
15	-7.58E+02	-1.96E+03	2097.579809	0.36143225
30	-7.58E+02	1.96E+03	2097.579447	0.36143184