

Wpływ tłumienia na charakterystyki dynamiczne ramy i belki

***Charakterystyki dynamiczne ramy i belki
z wbudowanym wiskotycznym tłumikiem drgań***

Roman Lewandowski, Maciej Wróblewski, Maciej Zywert

Poznań 2009

1. Wprowadzenie

W pracy omawia się wyniki analizy numerycznej ramy i belki, na których zainstalowano wiskotyczne tłumiki drgań. W szczególności analizuje się, w jaki sposób zmieniają się charakterystyki dynamiczne układu z tłumikiem drgań w zależności od wartości współczynnika tłumienia tłumika. Przez charakterystyki dynamiczne układu rozumie się tutaj częstości drgań własnych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia. Rozpatrywane układy traktuje się jako układy dyskretne z masami granulowanymi. Na ramie zainstalowano wiskotyczny tłumik drgań. Tłumik wiskotyczny jest również jedną z podpór rozpatrywanej belki.

2. Analiza drgań swobodnych tłumionych i nietłumionych

Ruch dowolnej konstrukcji traktowanej jako układ dyskretny opisuje równanie macierzowe o postaci:

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}\underline{q}(t) = \underline{0} ; \quad (1)$$

gdzie symbole \underline{M} , \underline{C} , \underline{K} i $\underline{q}(t)$ oznaczają odpowiednio macierze mas, tłumienia i sztywności o wymiarach $(n \times n)$ i wektor przemieszczeń o wymiarze $(n \times 1)$. Kropką oznaczono różniczkowanie względem czasu t .

Rozwiązanie równania ruchu (1) przyjmuje się o postaci:

$$\underline{q}(t) = e^{st} \underline{\tilde{c}} ; \quad (2)$$

gdzie $\underline{\tilde{c}}$ jest nieznanym wektorem, a s jest nieznanym parametrem.

Po podstawieniu funkcji (2) do równania (1) otrzymuje się kwadratowy problem własny o postaci:

$$(s^2 \underline{M} + s \underline{C} + \underline{K}) \underline{\tilde{c}} = \underline{0} . \quad (3)$$

Kwadratowy problem własny (3) jest trudny do rozwiązania. Aby uniknąć komplikacji związanych z rozwiązaniem kwadratowego problemu własnego korzysta się z tzw. zmiennych stanu. Do równania ruchu (1) dołącza się oczywistą zależność:

$$\dot{\underline{q}} = \underline{\dot{q}} , \quad (4)$$

a równanie (1) przepisuje się w postaci:

$$\ddot{\underline{q}} = -\underline{M}^{-1} \underline{K} \underline{q} - \underline{M}^{-1} \underline{C} \dot{\underline{q}} . \quad (5)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\underline{z}(t) = \text{col}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)) , \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1} \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \underline{C} \end{bmatrix} , \quad (6)$$

można równania (4) i (5) zapisać w następujący sposób:

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A} \underline{z}(t) . \quad (7)$$

Wektor $\underline{z}(t)$ jest nazywany wektorem stanu.

Po przyjęciu rozwiązania równania (7) w postaci:

$$\underline{z}(t) = e^{st} \underline{c} ; \quad (8)$$

gdzie \underline{c} jest wektorem własnym, i podstawieniu tego rozwiązania do równania (7) otrzymuje liniowy problem własny o postaci:

$$(\underline{A} - s\underline{I})\underline{c} = \underline{0} . \quad (9)$$

Rozwiązaniem problemu własnego (9) jest $2n$ wartości i wektorów własnych. Jeżeli tłumienie układu jest podkrytyczne to wartości i wektory własne są liczbami i wektorami zespolonymi, parami sprzężone tzn.

$$s_j = \mu_j + i\eta_j ; \quad s_{j+n} = \mu_j - i\eta_j ; \quad (10)$$

$$\underline{c}_j = \underline{a}_j + i\underline{b}_j ; \quad \underline{c}_{j+n} = \underline{a}_j - i\underline{b}_j ; \quad (11)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$ jest jednostką urojoną, a $j=1,2,\dots,n$.

Jeżeli tłumienie jest duże (układ jest tłumiony nadkrytycznie) to niektóre wartości i wektory własne są rzeczywiste. W tym przypadku co najmniej dwie wartości własne (np. s_j i s_{j+n}) są liczbami rzeczywistymi. Odpowiadające im wektory własne, \underline{c}_j i \underline{c}_{j+n} , są także wektorami rzeczywistymi.

Na podstawie wartości własnych można obliczyć częstości drgań własnych tłumionych ω_j i bezwymiarowe współczynniki tłumienia γ_j . Jeżeli wartości własne są liczbami zespolonymi, parami sprzężonymi to:

$$\omega_j = \sqrt{\mu_j^2 + \eta_j^2}, \quad \gamma_j = -\frac{\mu_j}{\omega_j} . \quad (12)$$

Jeżeli wartości własne są liczbami rzeczywistymi to:

$$\omega_j = \sqrt{s_j s_{j+n}}, \quad \gamma_j = -\frac{s_j + s_{j+n}}{2\omega_j}, \quad (13)$$

przy czym teraz wielkość ω_j nie może być interpretowana jako częstość drgań własnych tłumionych.

Charakterystyki dynamiczne układu bez tłumienia, tzn. częstości i postaci drgań własnych, otrzymuje się po podstawieniu $\underline{C} = \underline{0}$ w równaniu (1), przyjęciu rozwiązania równania ruchu o postaci:

$$\underline{q}(t) = \underline{a} \cos \omega t , \quad (14)$$

i rozwiązaniu poniższego liniowego problemu własnego:

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M})\underline{a} = \underline{0} . \quad (15)$$

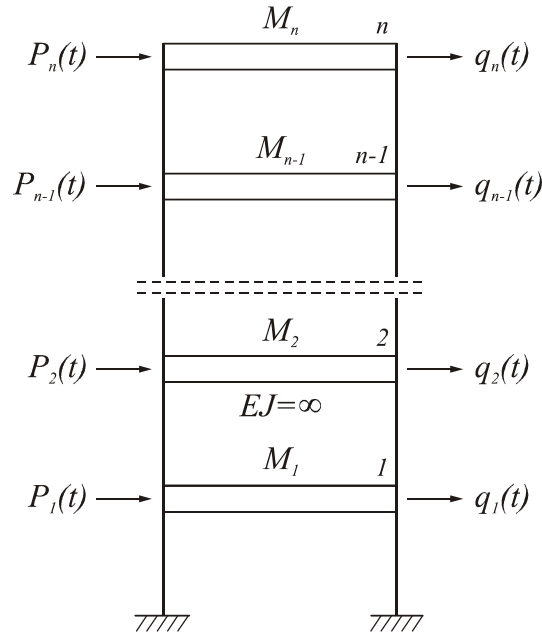
Rozwiązaniem problemu własnego (15) jest n wartości ω^2 (kwadratów częstości drgań własnych nietłumionych) i n wektorów własnych (postaci drgań własnych nietłumionych). Omawiane wielkości są liczbami i wektorami rzeczywistymi.

2. Analiza dynamiczna ramy

2.1 Wprowadzenie

Schemat obliczeniowy rozpatrywanej ramy pokazano na rys. 1. Do obliczeń przyjęto model tzw. ramy ścinanej. Masy tej ramy są skoncentrowane na wysokości rygli, a rygle ramy są

nieskończenie sztywne. Oznacza to, że jedynymi stopniami dynamicznej swobody ramy są przemieszczenia poziome rygli.



Rys.1 Schemat obliczeniowy ramy

Wektor przemieszczeń oraz macierze mas i sztywności mają postać:

$$\underline{q}(t) = \text{col}(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)) , \quad \underline{M} = \text{diag}(m_1, \dots, m_n) ,$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix} , \quad (16)$$

gdzie

$$k_i = \frac{24EJ_i}{L_i^3} , \quad k_{i+1} = \frac{24EJ_{i+1}}{L_{i+1}^3} , \quad (17)$$

a symbole EJ_i i L_i oznaczają odpowiednio sztywność na zginanie przekroju poprzecznego słupa o numerze i oraz wysokość słupa ramy. Wielkość k_i nazywa się sztywnością piętra o numerze i .

Siły tłumienia działające na ramę są sumą sił tłumienia ramy oraz sił tłumienia wywołanych przez tłumiki drgań. Można wobec tego napisać:

$$\underline{C} = \underline{C}_r + \underline{C}_t , \quad (18)$$

gdzie \underline{C}_r jest macierzą tłumienia ramy, a \underline{C}_t wynikającą z istnienia tłumików drgań. W obliczeniach przyjęto, że tłumienie wewnętrzne ramy jest pomijalnie małe, tzn. $\underline{C}_r = \underline{0}$.

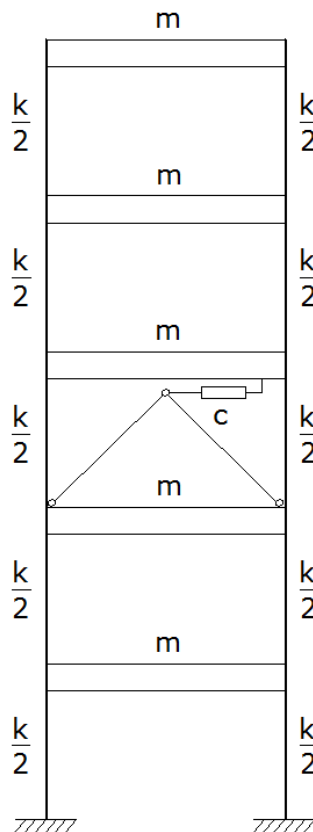
W pracy analizuje się ramę z wbudowanym tłumikiem wiskotycznym. Siłę $F_t(t)$ z jaką tłumik działa na ramę oblicza się ze wzoru:

$$F_t(t) = c_t \dot{x}(t) , \quad (19)$$

gdzie c_t jest współczynnikiem tłumienia tłumika, a $x(t)$ względnym przemieszczeniem końców tłumika.

Przykładowo, jeżeli na trzeciej kondygnacji ramy pięciokondygnacyjnej pokazanej na rys. 2 umieszczony jest tłumik drgań to macierz tłumienia ma postać:

$$\underline{C}_t = c_t \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$



Rys. 2 Rama z zainstalowanym tłumikiem drgań

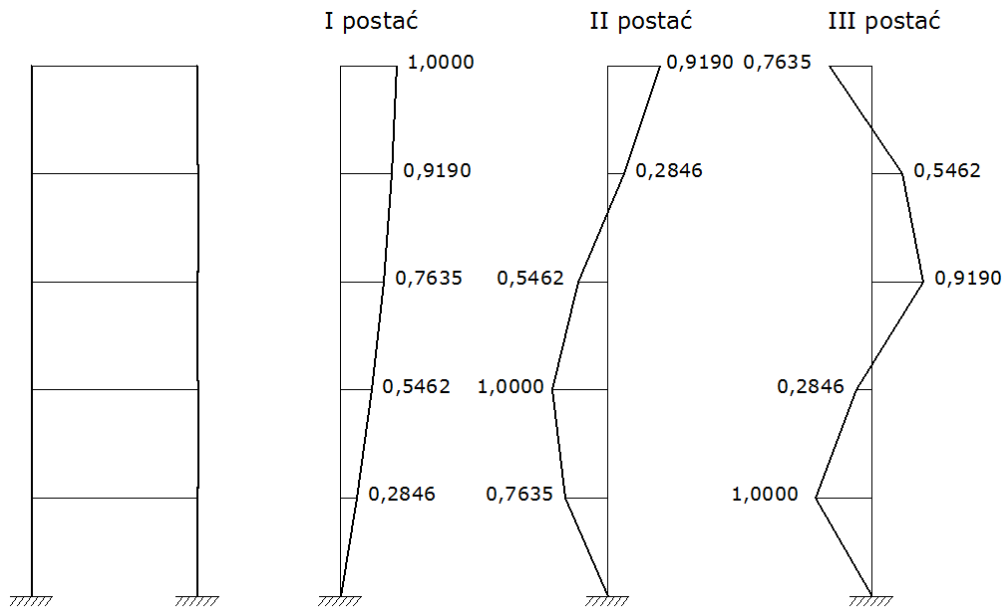
2.2 Wyniki obliczeń

Analizie poddano ramę pięciokondygnacyjną z tłumikiem wiskotycznym umieszczonym na trzeciej kondygnacji. Schemat obliczeniowy ramy pokazano na rys. 2. Masy skupione umieszczone na kolejnych piętrach są jednakowe. Jednakowe są również sztywności pięter, tzn. $k_i = k = const$. Przyjęto następujące dane do obliczeń: masa typowego stropu $m = 10000 \text{ kg}$, sztywność typowego piętra $k = 2250000 \text{ N/m}$

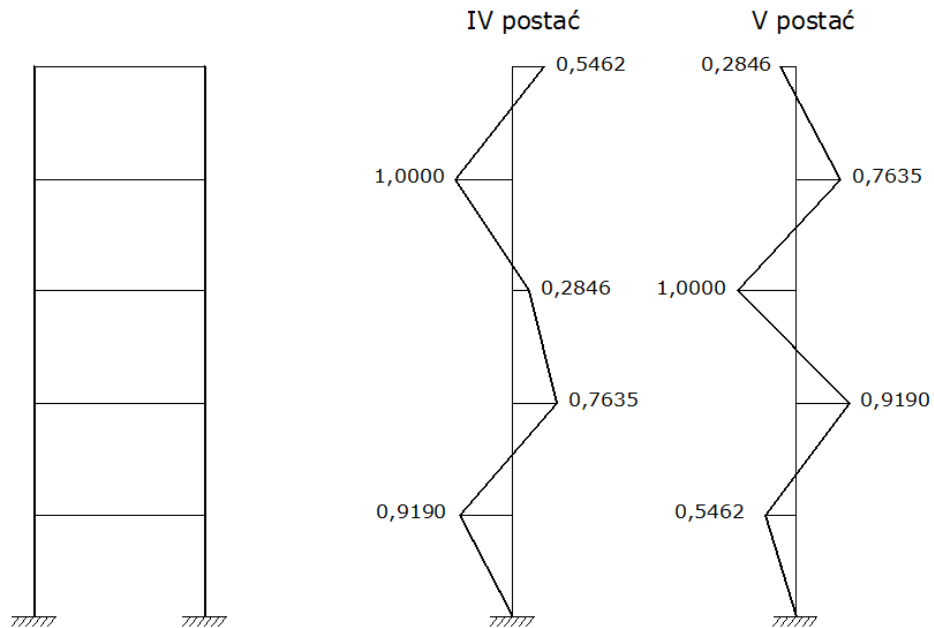
Częstości drgań własnych nietłumionych wyznaczono rozwiązując problem własny (15). W rezultacie otrzymano:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 4,2694 \text{ rad/s}, & \omega_2 &= 12,4625 \text{ rad/s}, & \omega_3 &= 19,6458 \text{ rad/s}, \\ \omega_4 &= 25,2376 \text{ rad/s}, & \omega_5 &= 28,7848 \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

Postacie drgań własnych nietłumionych rozpatrywanej ramy (bez tłumika) pokazano na rys. 3 i 4.



Rys. 3 Postacie drgań własnych ramy



Rys. 4 Postacie drgań własnych ramy

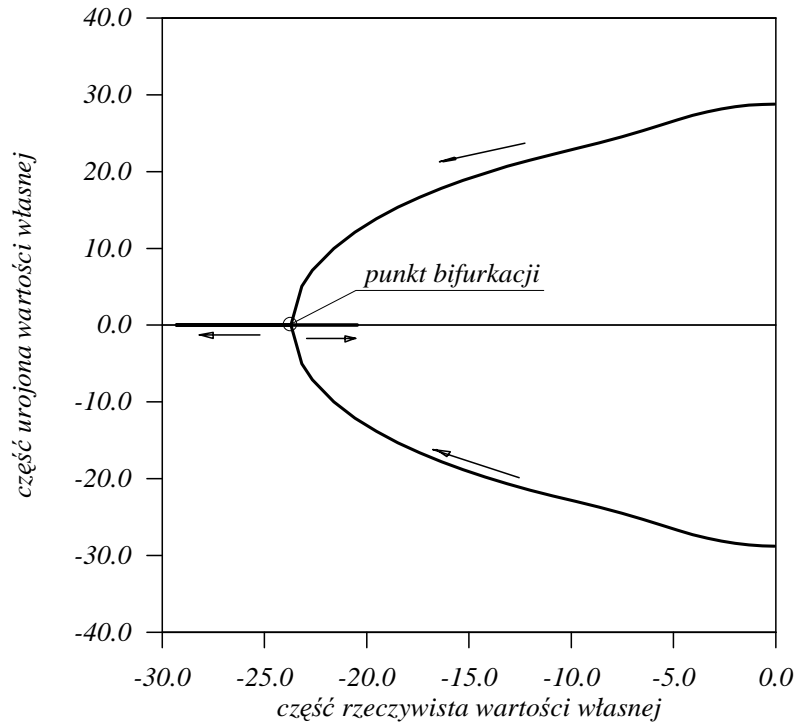
Obliczono również częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy z zainstalowanym tłumikiem drgań. Omawiane wielkości wyznaczono rozwiązując problem własny (9) i wykorzystując wzory (12) i (13). Obliczenia wykonano dla różnych wartości współczynnika tłumienia c_t , wziętych z przedziału $1000Ns/m \leq c_t \leq 250000Ns/m$. W tabeli 1 podano zestawienie wyników obliczeń. Zestawiono w niej wartości własne, częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia piątej postaci drgań wyliczone dla różnych wartości współczynnika tłumienia c_t .

Wpływ tłumienia na charakterystyki dynamiczne ramy i belki

Tabela 1

$L.p.$	c_t [Ns/m]	μ_5	η_5	ω_5	γ_5
1	1000	-0,06560	-28,7844	28,78447	0,002278975
2	10000	-0,65649	-28,7448	28,75230	0,022832716
3	20000	-1,31608	-28,6243	28,65454	0,045929198
4	30000	-1,98211	-28,4224	28,49143	0,069568639
5	40000	-2,65831	-28,1370	28,26230	0,094058529
6	50000	-3,34907	-27,7651	27,96636	0,119753537
7	60000	-4,06074	-27,3014	27,60174	0,147118986
8	70000	-4,80520	-26,7378	27,16615	0,176881869
9	80000	-5,60664	-26,0683	26,66441	0,210266806
10	90000	-6,50514	-25,3058	26,12854	0,248966883
11	100000	-7,52813	-24,5064	25,63662	0,293647503
12	110000	-8,63943	-23,7332	25,25677	0,342063902
13	120000	-9,77672	-22,9906	24,98303	0,391334389
14	130000	-10,90770	-22,2497	24,77957	0,440189244
15	140000	-12,02380	-21,4835	24,61935	0,488388141
16	150000	-13,12500	-20,6718	24,48651	0,536009523
17	160000	-14,21330	-19,7984	24,37200	0,583181443
18	170000	-15,29100	-18,8480	24,27060	0,630021636
19	180000	-16,35980	-17,8038	24,17888	0,676615229
20	190000	-17,42140	-16,6451	24,09491	0,723032472
21	200000	-18,47680	-15,3434	24,01691	0,769324549
22	210000	-19,52700	-13,8566	23,94387	0,815532197
23	220000	-20,57280	-12,1152	23,87505	0,861686034
24	230000	-21,61470	-9,98536	23,80972	0,907809997
25	240000	-22,65330	-7,12516	23,74742	0,953926827
26	245000	-23,17150	-5,0588	23,71729	0,976987565
Tłumienie nadkrytyczne					
27	250000	-23,93110			
28		-23,44680		23,68771	1,000052249

Z kolei rys. 5 przedstawia, w jaki sposób zmienia się 5 wartość własna i wartość z nią sprzężona wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia c_t . Na omawianym rysunku strzałkami pokazano kierunek przemieszczania się, na płaszczyźnie zespolonej, omawianych wartości własnych. Punkt bifurkacji odpowiada takiej wartości współczynnika tłumienia tłumika, dla której tłumienie piątej postaci drgań staje się krytyczne.

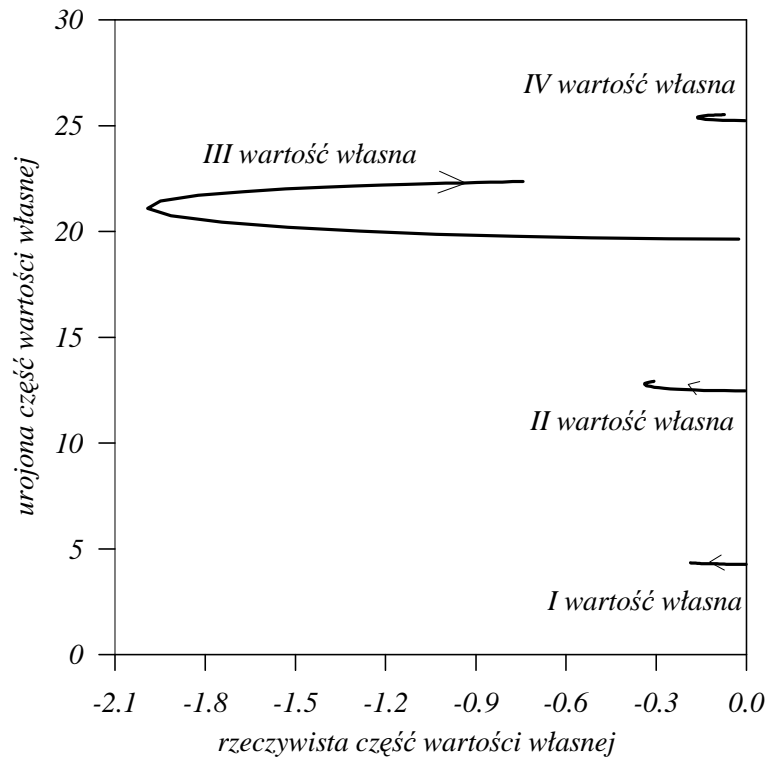


Rys. 5 Wykres zależności piątej wartości własnej od współczynnika tłumienia c_t

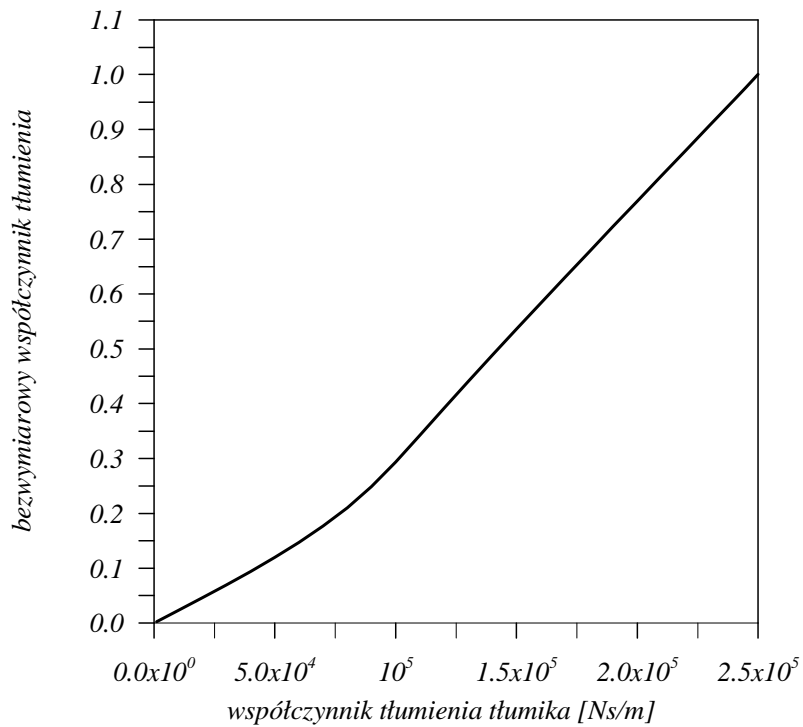
Na rys. 6 pokazano podobne wykresy, ale pokazujące w jaki sposób zmieniają się pozostałe wartości własne wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia tłumika. Pokazano tylko te wartości własne których część urojona jest dodatnia. Strzałki wskazują kierunek zmian wartości własnych wraz ze wzrostem wartości współczynnika tłumienia tłumika. Widać, że poszczególne wartości własne zmieniają się w różnym stopniu wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia tłumika. Widać również, że żadna z tych wartości nie zmienia się w taki sposób, aby, tak jak dla 5 wartości własnej, ich części urojone zmierzały do zera. Oznacza to również, że bezwymiarowe współczynniki tłumienia nigdy nie będą równe 1,0. Oznacza to także, że odpowiadające im postaci drgań zawsze będą podkrytycznie tłumione, niezależnie od tego jak duży będzie współczynnik tłumienia tłumika.

Na kolejnych rysunkach (rys. 7 i 8) pokazano jak zmieniają się odpowiednio bezwymiarowy współczynnik tłumienia (rys. 7) i częstość drgań własnych tłumionych piątej postaci drgań (rys. 8) w zależności od współczynnika tłumienia tłumika c_t . Widać, że omawiany bezwymiarowy współczynnik tłumienia jest w przybliżeniu wprost proporcjonalny do współczynnika tłumienia tłumika w pewnym zakresie jego wartości.

Wpływ tłumienia na charakterystyki dynamiczne ramy i belki

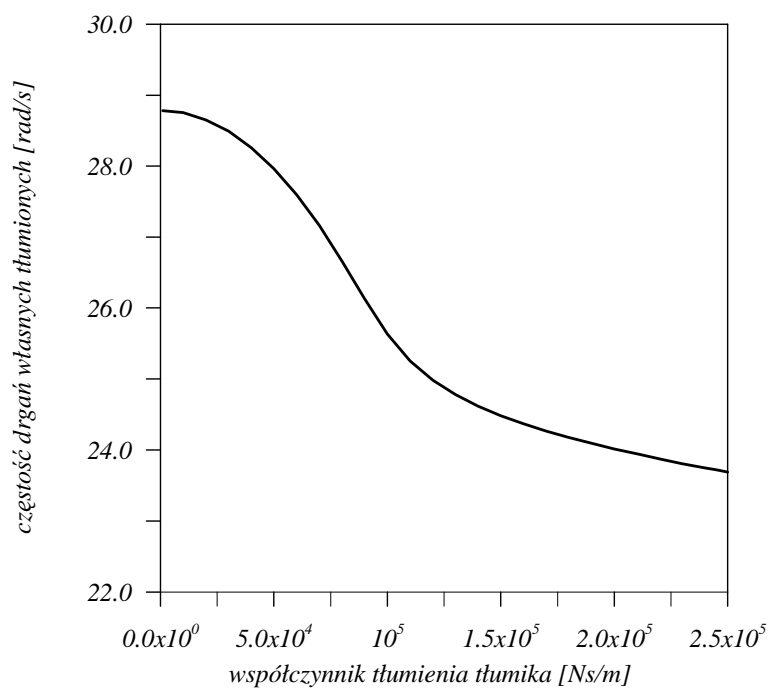


Rys. 6 Wykres zależności 1, 2, 3 i 4 wartości własnych od współczynnika tłumienia c_t



Rys. 7 Zależność bezwymiarowego współczynnika tłumienia 5 postaci drgań od współczynnika tłumienia tłumika c_t

Wpływ tłumienia na charakterystyki dynamiczne ramy i belki

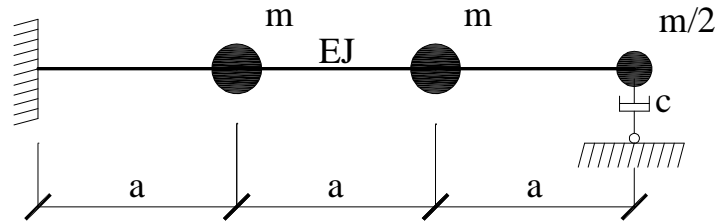


Rys. 8 Zależność 5 częstości drgań własnych tłumionych od współczynnika tłumienia tłumika

3. Analiza dynamiczna belki z tłumikiem wiskotycznym

3.1 Wprowadzenie

Analizie dynamicznej poddano belkę pokazaną na rys. 9. Prawy koniec belki opiera się na wiskotycznym tłumiku drgań. Belka ta jest traktowana jako układ dynamiczny o trzech stopniach swobody zdefiniowanych na rys. 10.



Rys. 9 Schemat obliczeniowy belki z tłumikiem

Równania ruchu belki zostaną wyprowadzone za pomocą kilku metod.

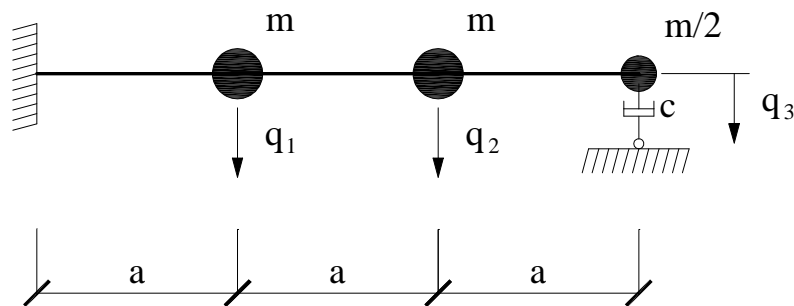
Równania ruchu zapisane przy użyciu współczynników podatności mają następującą postać macierzową:

$$\underline{DM}\ddot{q}(t) + \underline{DC}\dot{q}(t) + q(t) = \underline{0} \quad , \quad (21)$$

gdzie \underline{D} jest macierzą podatności o wymiarach (3×3) . Macierze mas i tłumienia mają postać:

$$\underline{M} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \quad , \quad \underline{C} = \text{diag}(0, 0, c) \quad , \quad (22)$$

a c jest współczynnikiem tłumienia tłumika drgań.



Rys. 10 Stopnie dynamicznej swobody belki z tłumikiem drgań

Macierz współczynników podatności ma postać:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad (23)$$

a współczynniki podatności oblicza się ze wzoru:

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i(x)M_k(x)}{EI} dx \quad , \quad (24)$$

gdzie $M_i(x)$ jest funkcją momentów zginających wywołanych siłą jednostkową działającą po kierunku stopnia dynamicznej swobody o numerze i .

Równania ruchu (21) otrzymuje się korzystając z zasady de'Alemberta i zasady superpozycji skutków. Po wykorzystaniu wspomnianych zasad można napisać:

Wpływ tłumienia na charakterystyki dynamiczne ramy i belki

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \delta_{11}B_1(t) + \delta_{12}B_2(t) + \delta_{13}B_3(t) + \delta_{13}F_t(t) , \\ q_2(t) &= \delta_{21}B_1(t) + \delta_{22}B_2(t) + \delta_{23}B_3(t) + \delta_{23}F_t(t) , \\ q_3(t) &= \delta_{31}B_1(t) + \delta_{32}B_2(t) + \delta_{33}B_3(t) + \delta_{33}F_t(t) . \end{aligned} \quad (25)$$

Po podstawieniu zależności:

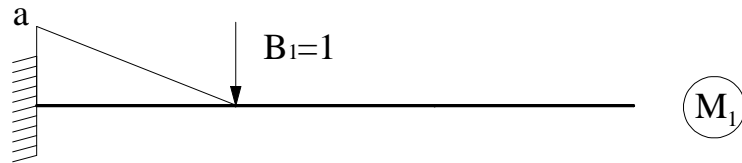
$$B_1(t) = -m_1\ddot{q}_1(t) , \quad B_2(t) = -m_2\ddot{q}_2(t) , \quad B_3(t) = -m_3\ddot{q}_3(t) , \quad F_t(t) = -c\dot{q}_3(t) , \quad (26)$$

można równania (25) zapisać w postaci:

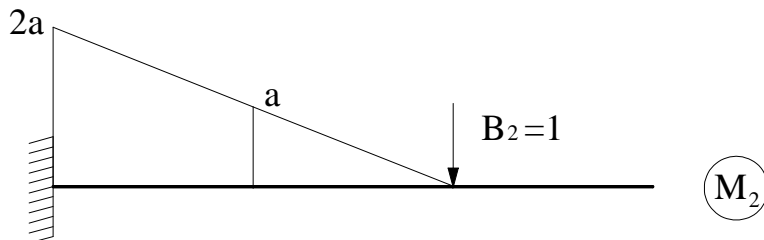
$$\begin{aligned} q_1(t) + \delta_{11}m_1\ddot{q}_1(t) + \delta_{12}m_2\ddot{q}_2(t) + \delta_{13}m_3\ddot{q}_3(t) + \delta_{13}c\dot{q}_3(t) &= 0 , \\ q_2(t) + \delta_{21}m_1\ddot{q}_1(t) + \delta_{22}m_2\ddot{q}_2(t) + \delta_{23}m_3\ddot{q}_3(t) + \delta_{23}c\dot{q}_3(t) &= 0 , \\ q_3(t) + \delta_{31}m_1\ddot{q}_1(t) + \delta_{32}m_2\ddot{q}_2(t) + \delta_{33}m_3\ddot{q}_3(t) + \delta_{33}c\dot{q}_3(t) &= 0 , \end{aligned} \quad (27)$$

lub macierzowo w postaci równania (21).

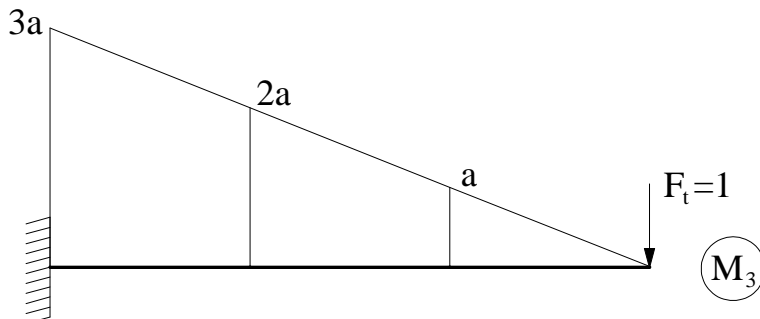
Wykresy momentów zginających niezbędnych do wyznaczenia współczynników podatności pokazano na rys 11, 12 i 13.



Rys. 11 Wykres momentów zginających wywołanych siłą $B_1 = 1$



Rys. 12 Wykres momentów zginających wywołanych siłą $B_2 = 1$



Rys. 13 Wykres momentów zginających wywołanych siłą $F_t = 1$

Można łatwo sprawdzić, że współczynniki podatności omawianej belki można obliczyć ze wzorów:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{a^3}{3EJ}, & \delta_{22} &= \frac{8a^3}{3EJ}, & \delta_{33} &= \frac{9a^3}{EJ}, & \delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{5a^3}{6EJ}, \\ \delta_{13} &= \delta_{31} = \frac{4a^3}{3EJ}, & \delta_{23} &= \delta_{32} = \frac{14a^3}{3EJ}. \end{aligned} \quad (28)$$

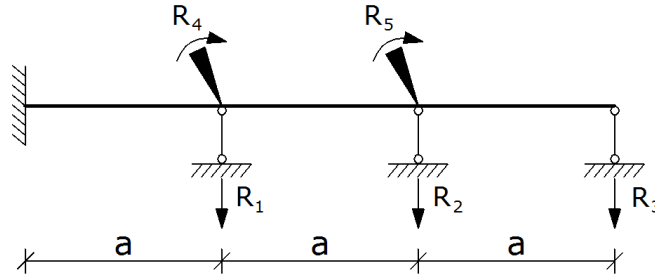
Równania ruchu belki można również zapisać za pomocą współczynników sztywności. Równanie ruchu ma wtedy postać:

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}\underline{q}(t) = \underline{0}. \quad (29)$$

Równanie ruchu w postaci (29) można otrzymać mnożąc równanie (21) przez macierz $\underline{D}^{-1} = \underline{K}$. Po obliczeniu macierzy odwrotnej do macierzy podatności otrzymuje się:

$$\underline{K} = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 240 & -138 & 36 \\ 13 & 13 & 13 \\ 138 & 132 & -48 \\ 13 & 13 & 13 \\ 36 & -48 & 21 \\ 13 & 13 & 13 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Do wyprowadzenia macierzy sztywności można także użyć zmodyfikowanej metody współczynników sztywności i zastosować metodę redukcji statycznej. W metodzie tej korzysta się z układu podstawowego pokazanego na rys. 14.



Rys. 14 Układ podstawowy pomocny przy obliczeniu współczynników sztywności

Po wykorzystaniu zasady de'Alemberta i zasady superpozycji skutków można napisać następujące równania (patrz rys. 14):

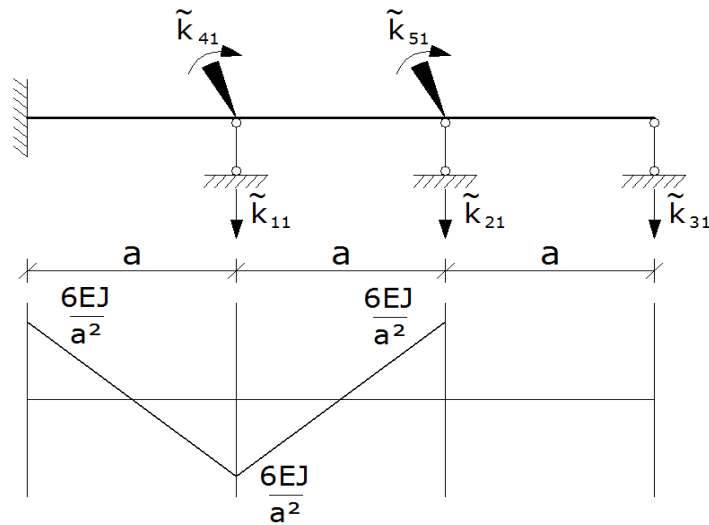
$$\begin{aligned} R_1 &= \tilde{k}_{11} \cdot q_1 + \tilde{k}_{12} \cdot q_2 + \tilde{k}_{13} \cdot q_3 + \tilde{k}_{14} \cdot q_4 + \tilde{k}_{15} \cdot q_5 + R_1^B + R_1^{Ft} = 0, \\ R_2 &= \tilde{k}_{21} \cdot q_1 + \tilde{k}_{22} \cdot q_2 + \tilde{k}_{23} \cdot q_3 + \tilde{k}_{24} \cdot q_4 + \tilde{k}_{25} \cdot q_5 + R_2^B + R_2^{Ft} = 0, \\ R_3 &= \tilde{k}_{31} \cdot q_1 + \tilde{k}_{32} \cdot q_2 + \tilde{k}_{33} \cdot q_3 + \tilde{k}_{34} \cdot q_4 + \tilde{k}_{35} \cdot q_5 + R_3^B + R_3^{Ft} = 0, \\ R_4 &= \tilde{k}_{41} \cdot q_1 + \tilde{k}_{42} \cdot q_2 + \tilde{k}_{43} \cdot q_3 + \tilde{k}_{44} \cdot q_4 + \tilde{k}_{45} \cdot q_5 + R_4^B + R_4^{Ft} = 0, \\ R_5 &= \tilde{k}_{51} \cdot q_1 + \tilde{k}_{52} \cdot q_2 + \tilde{k}_{53} \cdot q_3 + \tilde{k}_{54} \cdot q_4 + \tilde{k}_{55} \cdot q_5 + R_5^B + R_5^{Ft} = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

gdzie symbolami \tilde{k}_{ij} oznaczono współczynniki rozszerzonej macierzy sztywności, a ponadto łatwo można ustalić, że

$$\begin{aligned} R_1^B &= m_1 \ddot{q}_1, & R_2^B &= m_2 \ddot{q}_2, & R_3^B &= m_3 \ddot{q}_3, & R_4^B &= 0, & R_5^B &= 0, \\ R_1^{Ft} &= 0, & R_2^{Ft} &= 0, & R_3^{Ft} &= -c \dot{q}_3, & R_4^{Ft} &= 0, & R_5^{Ft} &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Współczynniki sztywności \tilde{k}_{ij} wyznacza się rozwiązując zadania pomocnicze zdefiniowane na rys. 15 - 19.

STAN $q_1=1$

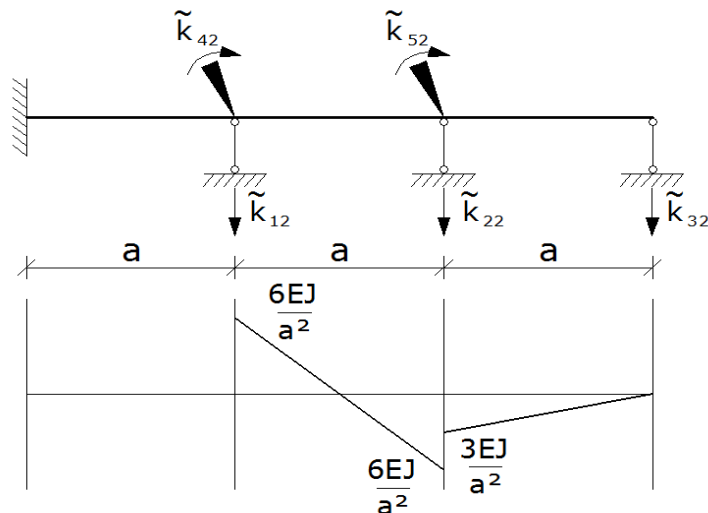


Rys. 15 Pierwsze zadanie pomocnicze

Współczynniki sztywności wyznaczone po rozwiązaniu pierwszego zadania pomocniczego są równe:

$$\tilde{k}_{11} = \frac{24EJ}{a^3}, \quad \tilde{k}_{21} = -\frac{12EJ}{a^3}, \quad \tilde{k}_{31} = 0, \quad \tilde{k}_{41} = 0, \quad \tilde{k}_{51} = \frac{6EJ}{a^2}. \quad (33)$$

STAN $q_2=1$

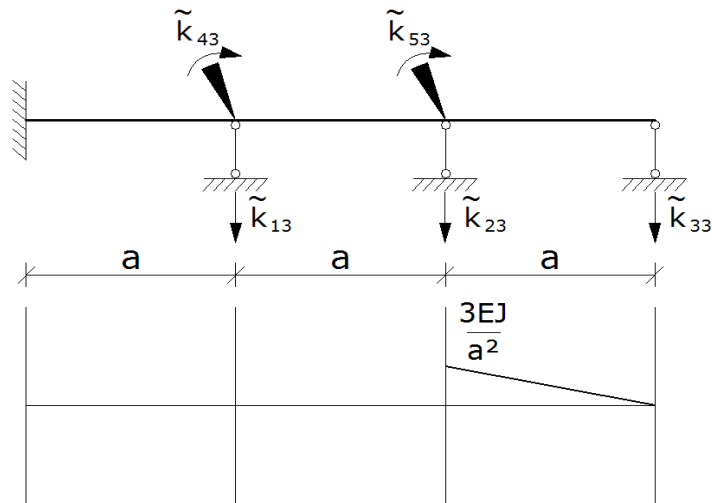


Rys. 16 Drugie zadanie pomocnicze

Współczynniki sztywności wyznaczone po rozwiązaniu drugiego zadania pomocniczego są równe:

$$\tilde{k}_{12} = -\frac{12EJ}{a^3}, \quad \tilde{k}_{32} = -\frac{3EJ}{a^3}, \quad \tilde{k}_{42} = -\frac{6EJ}{a^2}, \quad \tilde{k}_{22} = \frac{15EJ}{a^3}, \quad \tilde{k}_{52} = -\frac{3EJ}{a^2}. \quad (34)$$

STAN $q_3=1$

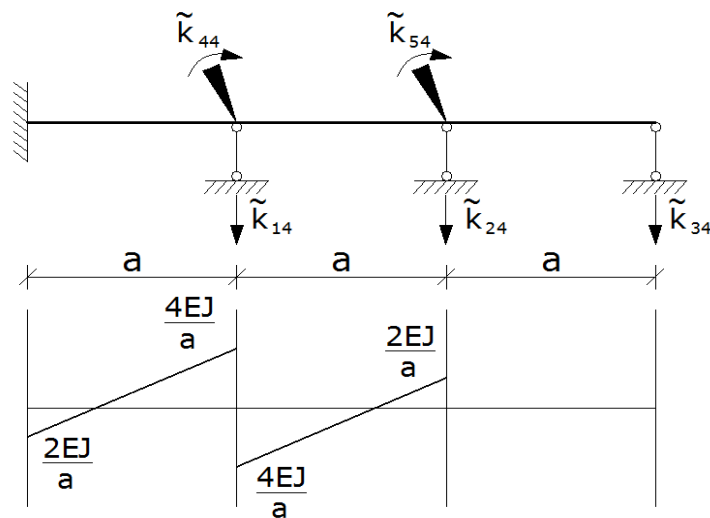


Rys. 17 Trzecie zadanie pomocnicze

Współczynniki sztywności wyznaczone po rozwiązaniu trzeciego zadania pomocniczego są równe:

$$\tilde{k}_{13} = 0, \quad \tilde{k}_{23} = -\frac{3EJ}{a^3}, \quad \tilde{k}_{33} = \frac{3EJ}{a^3}, \quad \tilde{k}_{43} = 0, \quad \tilde{k}_{53} = -\frac{3EJ}{a^2}. \quad (35)$$

STAN $q_4=1$

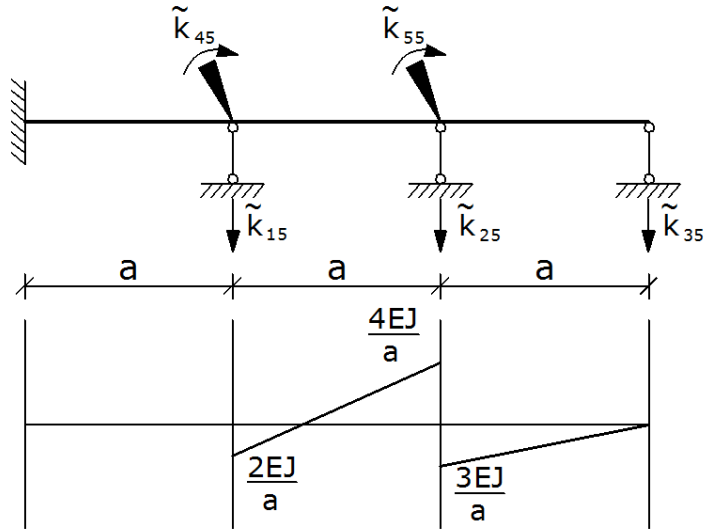


Rys. 18 Czwarte zadanie pomocnicze

Współczynniki sztywności wyznaczone po rozwiązaniu czwartego zadania pomocniczego są równe:

$$\tilde{k}_{14} = 0, \quad \tilde{k}_{24} = -\frac{6EJ}{a^2}, \quad \tilde{k}_{34} = 0, \quad \tilde{k}_{44} = \frac{8EJ}{a}, \quad \tilde{k}_{54} = \frac{2EJ}{a}. \quad (36)$$

STAN $q_5=1$



Rys. 19 Piąte zadanie pomocnicze

Współczynniki sztywności wyznaczone po rozwiązaniu piątego zadania pomocniczego są równe:

$$\tilde{k}_{15} = \frac{6EJ}{a^2}, \quad \tilde{k}_{35} = -\frac{3EJ}{a^2}, \quad \tilde{k}_{55} = \frac{7EJ}{a}, \quad \tilde{k}_{25} = -\frac{3EJ}{a^2}, \quad \tilde{k}_{45} = \frac{2EJ}{a}. \quad (37)$$

Z układu równań (31) można wyredukować, za pomocą redukcji statycznej, przemieszczenia uogólnione (tu kąty obrotu przekroji nad podporami belki) $q_4(t)$ i $q_5(t)$. Jeżeli ze współczynników sztywności występujących w (31) utworzymy macierz sztywności o postaci:

$$\tilde{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{K}}_{zz} & \tilde{\underline{K}}_{zr} \\ \tilde{\underline{K}}_{rz} & \tilde{\underline{K}}_{rr} \end{bmatrix}, \quad (38)$$

gdzie

$$\tilde{\underline{K}}_{zz} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \tilde{k}_{13} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{23} \\ \tilde{k}_{31} & \tilde{k}_{32} & \tilde{k}_{33} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{K}}_{zr} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{14} & \tilde{k}_{15} \\ \tilde{k}_{24} & \tilde{k}_{25} \\ \tilde{k}_{34} & \tilde{k}_{35} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{K}}_{rz} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{41} & \tilde{k}_{42} & \tilde{k}_{43} \\ \tilde{k}_{51} & \tilde{k}_{52} & \tilde{k}_{53} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{K}}_{rr} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{44} & \tilde{k}_{45} \\ \tilde{k}_{54} & \tilde{k}_{55} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

to macierz sztywności układu równań po wykonaniu redukcji statycznej wyznacza się ze wzoru:

$$\underline{K} = \tilde{\underline{K}}_{zz} - \tilde{\underline{K}}_{zr} \cdot \tilde{\underline{K}}_{rr}^{-1} \cdot \tilde{\underline{K}}_{rz}. \quad (40)$$

Po wykonaniu redukcji statycznej równania ruchu można zapisać w postaci (29), a po wykonaniu stosownych obliczeń otrzymuje się macierz sztywności w postaci (30). Macierze mas i tłumienia belki są określone wzorami (22).

3.2 Wyniki obliczeń dynamicznych belki z tłumikiem drgań

Do obliczeń przyjęto następujące dane: belka wykonana jest z dwuteownika zwykłego I300, a rozstaw między masami skupionymi wynosi $a=2,0$ m, masa jednostkowa belki wynosi $\tilde{m} = 54,2$ kg/m, moment bezwładności przekroju poprzecznego belki $I_x = 9800$ cm⁴, moduł

sprężystości materiału belki $E = 205 \text{ GPa}$. Masy skupione umieszczone na belce są równe: $m_1 = m_2 = 162,6 \text{ kg}$, $m_3 = 81,3 \text{ kg}$, a $EJ/a^3 = 2511250 \text{ N/m}$. Po wykonaniu stosownych obliczeń otrzymano następujące współczynniki sztywności:

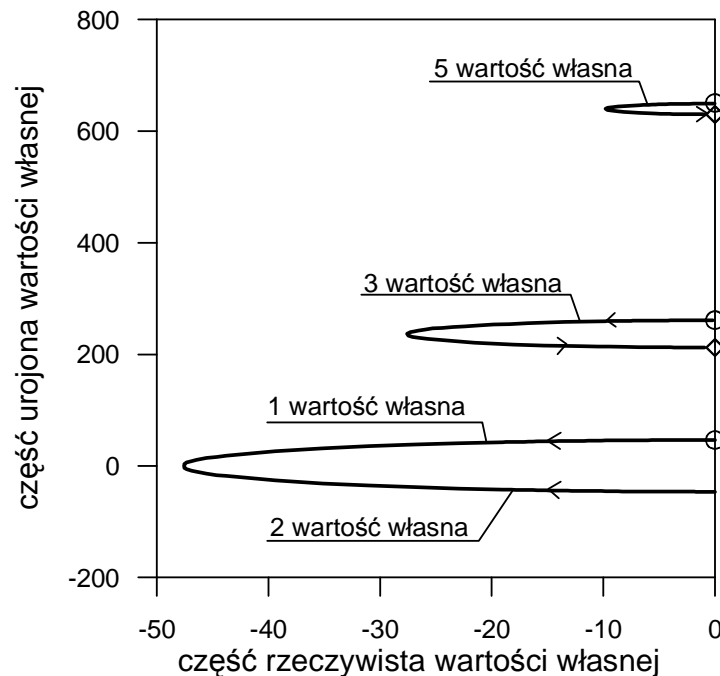
$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 46361538,46 & -26657884,62 & 6954230,769 \\ -26657884,62 & 25498846,15 & -9272307,692 \\ 6954230,769 & -9272307,692 & 4056634,615 \end{bmatrix} [\text{N/m}] .$$

Macierz mas ma postać:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 162,6 & 0 & 0 \\ 0 & 162,6 & 0 \\ 0 & 0 & 81,3 \end{bmatrix} .$$

Częstości drgań belki bez tłumika (belki wspornikowej) są równe: $\omega_1 = 46,23 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 261,11 \text{ rad/s}$ (kółka na rys.20) oraz $\omega_3 = 650,51 \text{ rad/s}$. Częstości drgań belki utwierdzonej na lewym końcu i swobodnie podparte na prawym końcu są równe: $\omega_1 = 211,9 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 630,1 \text{ rad/s}$ (romby na rys.20).

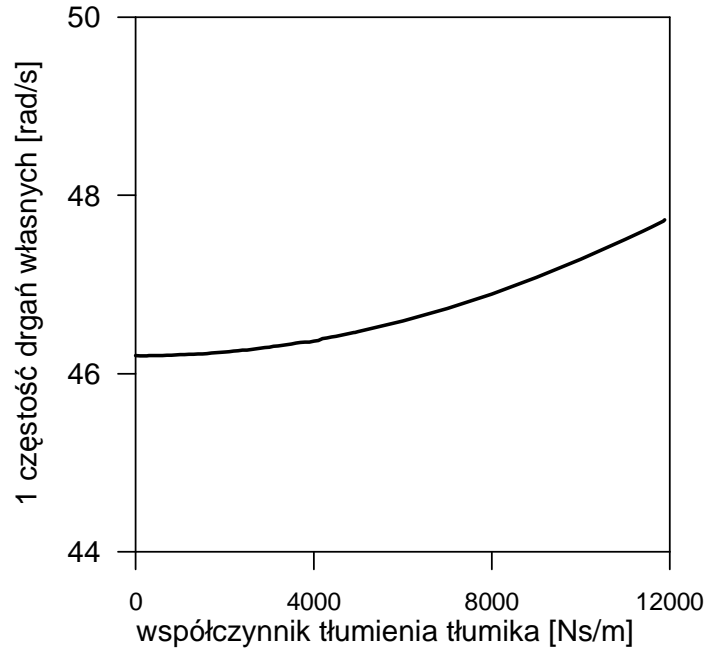
Obliczono wartości własne, częstości drgań własnych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia dla różnych wartości współczynnika tłumienia tłumika c . Otrzymano trzy pary zespolonych i sprzężonych wartości własnych lub 2 pary zespolonych, sprzężonych wartości własnych i 2 wartości rzeczywiste w zależności od wartości współczynnika tłumienia tłumika. Na rys. 20 przedstawiono, na płaszczyźnie zespolonej jak zmieniają się wartości 1, 2, 3 i 5 wartości własnej wraz ze wzrostem wartości współczynnika tłumienia tłumika. Strzałkami zaznaczono kierunek zmian przy wzroście współczynnika tłumienia tłumika.



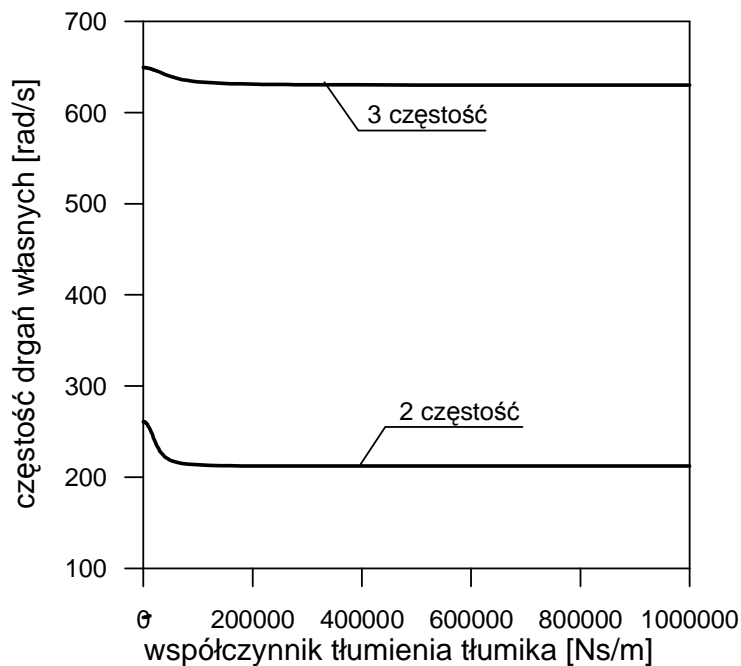
Rys. 20 Zmiany położenia wartości własnych spowodowane zmianami współczynnika tłumienia tłumika

Na rys. 21 pokazano zależność pierwszej częstości drgań własnych ω_1 od wartości współczynnika tłumienia c . Widać, że pierwsza częstość drgań własnych rośnie wraz ze wzrostem

wartości współczynnika tłumienia c . Wykres $\omega_1(c)$ pokazano dla tych wartości współczynnika c , dla których tłumienie tej postaci jest podkrytyczne i pojęcie częstości drgań własnych ma sens fizyczny. Na rys. 22 pokazano tą samą zależność, ale dla drugiej i trzeciej częstości drgań własnych belki. Widać, że druga i trzecia częstość drgań własnych maleje wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia tłumika. Porównując rysunki 20 i 22 widać, że dla dużych wartości współczynnika c druga częstość drgań własnych belki z tłumikiem jest bliska, co do wartości, pierwszej częstości drgań własnych belki utwierdzonej na lewym końcu i swobodnie podpartej na prawym końcu. Podobnie trzecia częstość drgań własnych belki z tłumikiem jest bliska, dla dużych wartości c , drugiej częstości drgań własnych wspomnianej powyżej belki utwierdzonej – swobodnie podpartej.

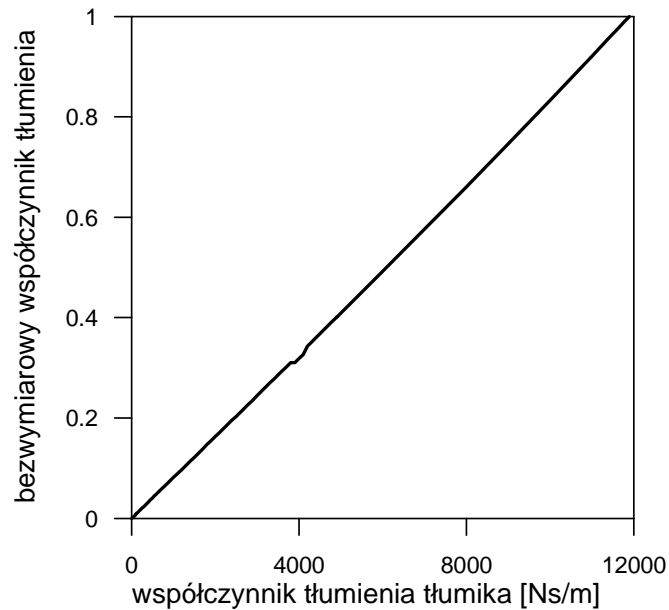


Rys. 21 Zależność pierwszej częstości drgań od współczynnika tłumienia tłumika



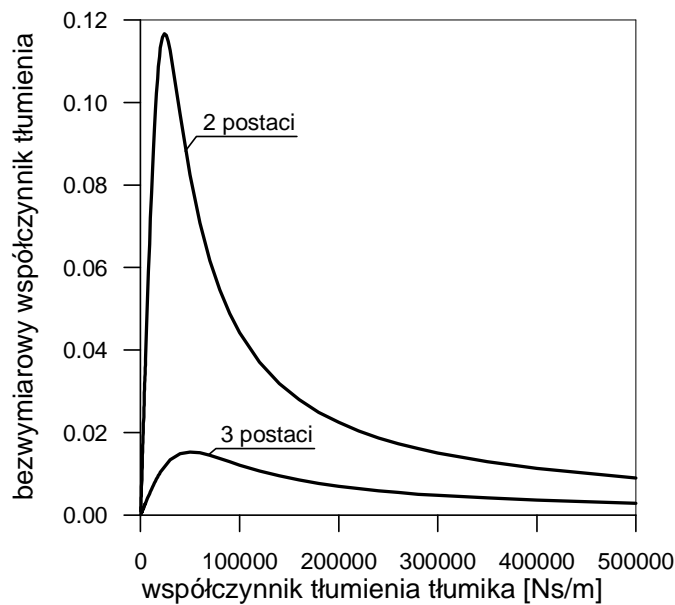
Rys. 22 Zależność drugiej częstości drgań od współczynnika tłumienia tłumika

Na rys 23 pokazano zależność bezwymiarowego współczynnika tłumienia pierwszej postaci drgań od współczynnika tłumienia tłumika. Widać, że jest to zależność liniowa.



Rys. 23 Zależność bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań od współczynnika tłumienia tłumika

Na rys. 24 pokazano te same zależności, ale dla drugiej i trzeciej postaci drgań. Tym razem zależności $\gamma_2(c)$ i $\gamma_3(c)$ są nieliniowe. Widać, że tłumienie 2 postaci drgań jest większe od tłumienia 3 postaci. Obie funkcje mają ekstrema maksima. Na rys. 20 maksimum tym odpowiadają punkty na krzywych $s_3(c)$ i $s_5(c)$ które są najbardziej oddalone od osi urojonej.



Rys. 24 Zależność bezwymiarowych współczynników tłumienia 2 i 3 postaci drgań od współczynnika tłumienia tłumika

4. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono analizę wpływu tłumika wiskotycznego na charakterystyki dynamiczne (tzn. na częstości drgań własnych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia modalnego) ramy płaskiej i belki. Rozpatrywano szeroki zakres zmienności współczynnika tłumienia tłumika. Wyniki obliczeń wskazują na pewne podobieństwa w sposobach zmian charakterystyki dynamicznych obu układów.

- 1) W obu przypadkach odpowiednio duży wzrost współczynnika tłumienia tłumika spowodował pojawienie się pary rzeczywistych wartości własnych i nadkrytyczne tłumienie jednej z postaci drgań (5 postaci drgań w przypadku ramy i 1 postaci drgań w przypadku belki).
- 2) Zależność bezwymiarowego współczynnika tłumienia omawianych postaci drgań od współczynnika tłumienia tłumika jest w przybliżeniu liniowa.
- 3) Krzywe reprezentujące na płaszczyźnie zespolonej przesuwające się sprzężonych, zespolonych wartości własnych stowarzyszone ze wspomnianą postacią drgań mają punkt bifurkacji.
- 4) Pozostałe krzywe reprezentujące przemieszczanie się na płaszczyźnie zespolonej pozostałych wartości własnych mają kształt charakterystycznej pętli.
- 5) Istnieją takie wartości współczynników tłumienia tłumika, dla których bezwymiarowe współczynniki tłumienia podkrytycznie tłumionych postaci drgań mają wartości ekstremalne.
- 6) Wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia tłumika wartości częstości drgań własnych omawianych postaci drgań belki zbiegają do częstości drgań własnych belki z podporą przegubową w miejscu tłumika.