

Optymalne rozmieszczanie wiskotycznych tłumików drgań.

*Roman Lewandowski, Bartosz Chorążyczewski*

Autorzy pragną wyrazić podziękowanie swoim studentom: Annie Chorowskiej, Annie Zielonej, Bartoszowi Dąbrowskiemu, Tomaszowi Terleckiemu Marii Lewandowskiej i Szymonowi Staszakowi, którzy wykonali część obliczeń niezbędnych do przeprowadzenia w trakcie przygotowania niniejszego opracowania.

Poznań, czerwiec 2008

## 1. Opis zadania optymalizacji

Celem prezentowanego zadania jest optymalizacja położenia tłumików wiskotycznych rozmieszczonych na dziesięciokondygnacyjnej konstrukcji ramowej. Na konstrukcji należy umieścić 10 tłumików o zadanych współczynnikach tłumienia parametrach  $c_i = c = const.$  przy czym na jednej kondygnacji może się znaleźć kilka tłumików. Jako model rozpatrywanej konstrukcji przyjęto ramę ścinaną. Konstrukcja jest obciążona siłami wywołanymi wymuszeniem kinematycznym (siłami wywołanymi trzęsieniem ziemi lub siłami parasejsmicznymi).

Obliczenia wykonano przyjmując kilka kryteriów optymalizacji.

### Kryterium 1

Tłumiki należy rozmieścić tak, aby bezwymiarowy współczynnik tłumienia 1 postaci drgań był maksymalny, tzn. aby funkcjonał o postaci:

$$I = \gamma_1, \quad (1)$$

osiągał wartość maksymalną. We wzorze (1) symbolem  $\gamma_1$  oznaczono bezwymiarowy współczynnik tłumienia 1 postaci drgań.

### Kryterium 2

Tłumiki należy rozmieścić tak, aby suma bezwymiarowych współczynników tłumienia wszystkich postaci drgań pomnożonych przez odpowiednie współczynniki wagowe była maksymalna, tzn., aby funkcjonał o postaci:

$$I = \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i, \quad (2)$$

osiągał wartość maksymalną. We wzorze (2) symbole  $\alpha_i$ ,  $\gamma_i$  oznaczają odpowiednio współczynnik wagowy i bezwymiarowy współczynnik tłumienia postaci drgań o numerze  $i$ .

Współczynniki wagowe przyjęto tak, aby:

*wariant 1*

a) określały względny udział poszczególnych postaci drgań we wzorze na przemieszczenie stropu ostatniej kondygnacji, (*Zielona i Terlecki oraz Lewandowska i Staszak*)

*wariant 2*

b) określały względny udział poszczególnych postaci drgań we wzorze na siłę poprzeczną w słupie najniższej kondygnacji. (*Chorowska i Dąbrowski*).

Niezależnie od przyjętego kryterium optymalizacyjnego powinny być spełnione następujące ograniczenia:

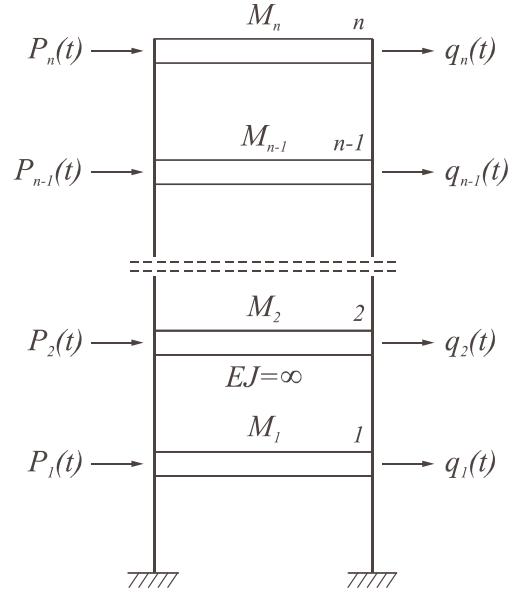
- suma współczynników tłumienia tłumików rozmieszczanych na ramie jest stała,
- spełnione są warunki wynikające z równań ruchu konstrukcji.

## 2. Równania ruchu ramy ścinanej bez zainstalowanych tłumików drgań

Pod pojęciem rama ścinana rozumie się konstrukcję ramową spełniającą następujące założenia [1]:

- rygle ramy są nieskończenie sztywne,
- słupy są nieważkie, a masa ramy jest skoncentrowana na poziomie stropów,
- pręty ramy są nieodkształcalne osiowo,
- rama jest obciążona siłami poziomymi.

Jedynymi stopniami dynamicznej swobody ramy ścinanej są przemieszczenia poziome rygli. Schemat obliczeniowy omawianej ramy pokazano na rys. 1.



Rys. 1 Schemat obliczeniowy ramy ścinanej

Równanie ruchu ramy ścinanej bez zainstalowanych tłumików drgań można zapisać w postaci [1]:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t) , \quad (3)$$

gdzie  $\mathbf{M}$  jest macierzą mas,  $\mathbf{K}$  jest macierzą sztywności,  $\mathbf{C}$  macierzą tłumienia,  $\mathbf{q}(t)$  wektorem przemieszczeń dynamicznych konstrukcji, a  $\mathbf{P}(t)$  wektorem sił wymuszających. Kropką oznaczono pochodną względem czasu  $t$ .

Dla potrzeb rozpatrywanego problemu optymalizacji wygodne będzie zapisanie równania ruchu (1) za pomocą tzw. zmiennych stanu. W tym celu do równania (3) dopisuje się równanie (4), a równanie (3) zapisuje się w sposób następujący:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{I} \dot{\mathbf{q}}(t) , \quad (4)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{q}(t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}(t) , \quad (5)$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową.

Po wyprowadzeniu wektor stanu zdefiniowanego wzorem (6):

$$\mathbf{z}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix} , \quad (6)$$

równania (4) i (5) można sprowadzić do postaci:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{P}}(t) , \quad (7)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(t) \end{Bmatrix} , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix} . \quad (8)$$

Łatwo sprawdzić (porównaj [1]), że w omawianym przypadku macierze mas i sztywności mają postać:

$$\mathbf{M} = \text{diag}[M_1, M_2, \dots, M_n] , \quad (9)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -k_{i-1} & k_{i-1} + k_i & -k_i & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{n-1} & k_n \end{bmatrix}, \quad (10)$$

gdzie  $M_i$  jest masą piętra o numerze  $i$ ,  $n$  jest ilością pięter ramy,  $k_i$  sztywnością kondygnacji o numerze  $i$ .

W przypadku ramy jednoprzęsłowej sztywność kondygnacji o numerze  $i$  oblicza się ze wzoru:

$$k_i = \frac{24EI_i}{l_i^3} \quad (11)$$

gdzie symbolem  $l_i$  oznacza się wysokość kondygnacji o numerze  $i$ , a symbolem  $EI_i$  sztywność na zginanie słupa tejże kondygnacji.

Przyjęto, że siły tłumienia ramy mają charakter sił wiskotycznych. Założono, że elementy macierzy tłumienia  $\mathbf{C}$  są zadane, a macierz tłumienia ma następującą strukturę:

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -c_{i-1} & c_{i-1} + c_i & -c_i & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{n-1} & c_n \end{bmatrix}, \quad (12)$$

gdzie symbolem  $c_i$  oznaczono współczynnik tłumienia siły tłumienia działającej na kondygnacji o numerze  $i$ , ( $i=1,2,\dots,n$ ).

W dalszym ciągu zakłada się, że rama jest obciążona siłami wywołwanymi trzęsieniem ziemi lub siłami parasejsmicznymi. Siły wymuszające opisywane są wzorem (porównaj [2]):

$$\mathbf{P}(t) = -\mathbf{M} \mathbf{e} \ddot{q}_0(t), \quad (13)$$

gdzie  $\ddot{q}_0(t)$  jest przyspieszeniem podstawy ramy, a  $\mathbf{e} = \text{col}(1,1,1,\dots,1)$ .

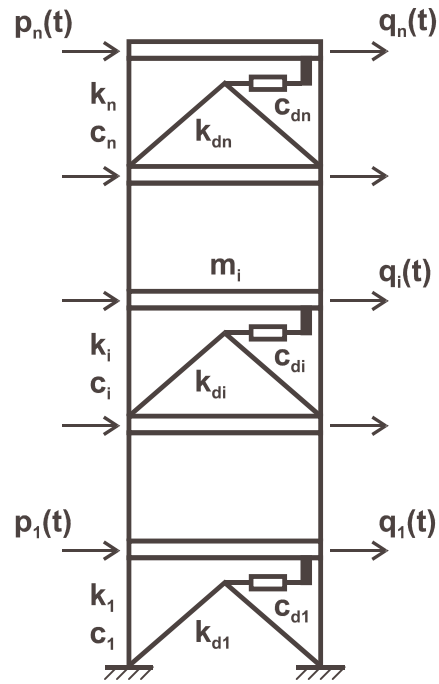
### 3. Równania ruchu ramy ścinanej z zainstalowanymi tłumikami drgań

Schemat obliczeniowy ramy z zainstalowanymi tłumikami drgań pokazano na rys.2.

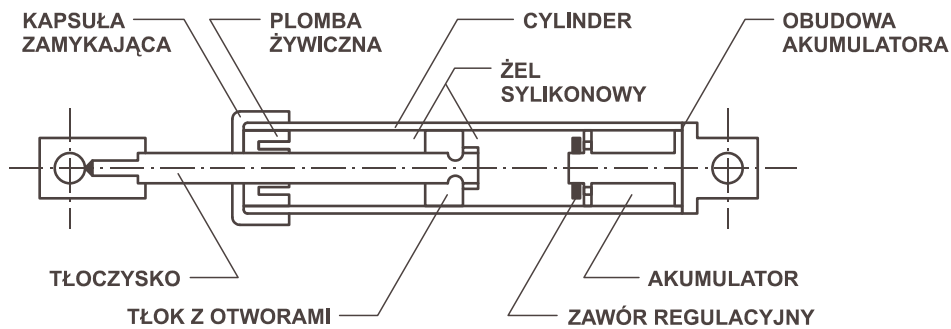
Na rys. 3 pokazano natomiast schematycznie budowę tłumika drgań. W omawianych poniżej obliczeniach założono, że tłumik jest tłumikiem wiskotycznym. Siłę tłumienia w takim tłumiku można wyznaczyć ze wzoru:

$$f_t = c\dot{x}, \quad (14)$$

gdzie  $c$  jest współczynnikiem tłumienia, a  $\dot{x}$  jest prędkością względnego przemieszczenia tłoka tłumika względem jego obudowy.



Rys. 2 Schemat obliczeniowy ramy ścinanej z zainstalowanymi tłumikami drgań



Rys. 3 Schemat tłumika drgań

Pisząc równania ruchu ramy ścinanej z wiskotycznymi tłumikami drgań założono ponadto, że elementy łączące tłumik z ramą (zastrzały) mają nieskończenie dużą sztywność.

Równanie ruchu ramy ścinanej z zainstalowanymi tłumikami drgań można także zapisać w postaci [1]:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t) . \quad (15)$$

Równania (3) i (15) różnią się tylko macierzą tłumienia. Siły tłumienia są w omawianym przypadku sumą sił tłumienia konstrukcji  $\mathbf{C}_k \dot{\mathbf{q}}(t)$  i sił tłumienia wywoływanych przez tłumiki. Te ostatnie siły można przedstawić w postaci  $\mathbf{C}_t \dot{\mathbf{q}}(t)$  i wobec tego macierz tłumienia występująca w równaniu (15) może być zapisana w postaci:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_k + \mathbf{C}_t . \quad (16)$$

Na macierz  $\mathbf{C}_t$  składają się współczynniki tłumienia poszczególnych tłumików umieszczonych na konstrukcji. Można ją zapisać w postaci:

$$\mathbf{C}_t = \sum_{j=1}^m \mathbf{C}_{tj} , \quad (17)$$

gdzie  $\mathbf{C}_{ij}$  jest macierzą tłumienia uwzględniającą wpływ tłumika o numerze  $j$ . Jeżeli tłumik o numerze  $j$  jest umieszczony na kondygnacji  $i$  to macierz ta ma postać:

$$\mathbf{C}_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{kolumny} \\ i-1 & i \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_j & -c_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_j & c_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \text{wiersz } i-1 \\ \text{wiersz } i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{matrix} , \quad (18)$$

gdzie symbolem  $c_j$  oznaczono współczynnik tłumienia tłumika o numerze  $j$ . Na rys. 2 współczynnik ten opisano symbolem  $c_{di}$ . Jeżeli tłumiki są umieszczone w ukośnych zastrzałach to niezerowe elementy macierzy  $\mathbf{C}_{ij}$  liczy się w sposób opisany w [1].

#### 4. Współczynniki wagowe

Współczynnik wagowy  $\alpha_i$  jest równy współczynnikowi udziału postaci drgań o numerze  $i$  w wyrażeniu na wielkość  $\delta$  charakteryzującą zachowanie konstrukcji (np. przemieszczenie wybranego punktu). Współczynnik ten definiuje się w następujący sposób (patrz praca [2]):

$$\alpha_i = \frac{\delta_i^{st}}{\delta^{st}} , \quad (19)$$

gdzie  $\delta^{st}$  jest wartością wielkości charakteryzującej zachowanie konstrukcji poddanej działaniu sił statycznych opisanych wzorem

$$\mathbf{P}^{st} = \mathbf{M} \mathbf{e} , \quad (20)$$

gdzie  $\mathbf{e} = \text{col}(1,1,1,\dots,1)$ , a  $\delta_i^{st}$  jest wielkością charakteryzującą zachowanie ramy obciążonej siłami:

$$\mathbf{P}_i^{st} = \varepsilon_i \mathbf{M} \mathbf{a}_i . \quad (21)$$

We wzorze (21) symbolem  $\varepsilon_i$  oznaczono wielkość daną wzorem:

$$\varepsilon_i = \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{M} \mathbf{I}}{\mathbf{a}_i^T \mathbf{M} \mathbf{a}_i} , \quad (22)$$

gdzie  $\mathbf{a}_i$  jest wektorem postaci drgań własnych, nietłumionych o numerze  $i$ , spełniającym równanie

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{a}_i = \mathbf{0} . \quad (23)$$

Zdefiniowane w ten sposób współczynniki wagowe mają następujące cechy:

- są bezwymiarowe,
- nie zależą od sposobu normowania wektorów postaci drgań  $\mathbf{a}_i$ ,
- suma wszystkich współczynników wagowych jest równa jedności, tzn.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 . \quad (24)$$

Niech wielkością charakteryzującą zachowanie ramy będzie przemieszczenie jej wierzchołka. Wtedy  $\delta^{st} = q_n^{st}$ , gdzie  $q_n^{st}$  jest  $n$ -tym elementem wektora  $\mathbf{q}^{st}$  wyznaczanym z równania statyki o postaci:

$$\mathbf{K} \mathbf{q}^{st} = \mathbf{M} \mathbf{e} . \quad (25)$$

Wielkość  $\delta_i^{st}$  należy teraz interpretować jako  $n$ -ty element wektora  $\mathbf{q}_i^{st}$  (tzn.  $\delta_i^{st} = q_{ni}^{st}$ ). Wektor  $\mathbf{q}_i^{st}$  jest rozwiązaniem następującego równania statyki:

$$\mathbf{K} \mathbf{q}_i^{st} = \varepsilon_i \mathbf{M} \mathbf{a}_i , \quad (26)$$

gdzie symbolem  $\varepsilon_i$  oznaczono wielkość opisana wzorem (22).

Z porównania wzorów (25) i (26) wynika, że

$$q_n^{st} = \sum_{i=1}^n q_{ni}^{st} , \quad (27)$$

a współczynniki wagowe da się wyrazić wzorem:

$$\alpha_i = \frac{q_{ni}^{st}}{\sum_{j=1}^n q_{nj}^{st}} , \quad (28)$$

gdzie  $i=1,2,\dots,n$ .

Jeżeli wielkością charakteryzującą zachowanie konstrukcji jest siła poprzeczna w słupie pierwszej kondygnacji  $Q_1$  to rozumując w podobny sposób do opisanego powyżej można napisać:

$$\alpha_i = \frac{Q_{1i}^{st}}{Q_1^{st}} = \frac{Q_{1i}^{st}}{\sum_{j=1}^n Q_{1j}^{st}} , \quad (29)$$

gdzie  $Q_{1i}^{st}$  i  $Q_{1i}^{st}$  to siły poprzeczne w słupie 1 kondygnacji ramy obciążonej odpowiednio siłami  $\mathbf{P}^{st} = \mathbf{M} \mathbf{e}$  i  $\mathbf{P}_i^{st} = \varepsilon_i \mathbf{M} \mathbf{a}_i$ .

W [3] wykazano, że wzór (29) można przekształcić do postaci:

$$\alpha_i = \frac{g_{1i}^{st}}{\sum_{j=1}^n g_{1j}^{st}} , \quad (30)$$

gdzie  $g_{1j}^{st} = \varepsilon_j \mathbf{M} \mathbf{a}_k = \varepsilon_j \sum_{k=1}^n M_k a_{kj}$ ,  $M_k$  jest masą  $k$ -tej kondygnacji, a  $a_{kj}$   $k$ -tym elementem wektora  $\mathbf{a}_j$ , tzn. wektora postaci drgań o numerze  $j$ .

## 5. Wyznaczanie bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości drgań własnych tłumionych ramy ścinanej

Rozwiązaniem równania ruchu (7) przy założeniu, że  $\tilde{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{0}$  jest

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{c} \exp(\lambda t) , \quad (31)$$

gdzie  $\lambda$  jest nieznanym parametrem (wartością własną), a  $\mathbf{c}$  nieznanym wektorem (wektorem własnym).

Po podstawieniu (31) do (7) otrzymuje się macierzowe równanie algebraiczne o postaci:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{c} = \mathbf{0} . \quad (32)$$

Równanie (32) jest liniowym problemem własnym. W ogólności ma ono  $2n$  rozwiązań, gdzie  $n$  jest liczbą stopni dynamicznej swobody układu. Po jego rozwiązaniu mamy  $2n$  wartości i wektorów własnych, które dalej oznaczane będą symbolami  $\lambda_j$  i  $\mathbf{c}_j$ , ( $j=1,2,\dots,2n$ ).

W ogólności wartości własne  $\lambda_j$  są liczbami zespolonymi, sprzężonymi, lub liczbami rzeczywistymi. Jeżeli są liczbami zespolonymi to dają się zapisać w postaci:

$$\lambda_j = \mu_j + i\eta_j \quad \lambda_{j+n} = \mu_j - i\eta_j , \quad (33)$$

gdzie symbol  $i^2 = -1$  oznacza jednostkę urojoną.

Pojęcia częstości i postaci drgań własnych, tłumionych układu o wielu stopniach swobody oraz związane z tymi bezwymiarowe współczynniki tłumienia zostały zdefiniowane, między innymi w pracy [1]. Częstości drgań własnych, tłumionych i bezwymiarowego współczynnika tłumienia oblicza się w różny sposób zależnie od tego czy wartości własne problemu (32) są liczbami zespolonymi czy też liczbami rzeczywistymi.

Dla układu o jednym stopniu swobody wykonującego drgania swobodne, podkrytycznie tłumione można napisać następujące relacje między wartościami własnymi równania charakterystycznego  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , a częstością drgań własnych tłumionych  $\omega$  i bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia  $\gamma$  (porównaj [1]):

$$\lambda_1 = -\gamma \omega + i \omega \sqrt{1 - \gamma^2} , \quad \lambda_2 = -\gamma \omega - i \omega \sqrt{1 - \gamma^2} . \quad (34)$$

Jeżeli wartości własne  $\lambda_j$  i  $\lambda_{j+n}$  są liczbami zespolonymi, sprzężonymi to przez analogię z układem o jednym stopniu swobody można napisać równania (patrz [1]):

$$\lambda_j = \mu_j + i \eta_j = -\gamma_j \omega_j + i \omega_j \sqrt{1 - \gamma_j^2} , \quad (35)$$

$$\lambda_{j+n} = \mu_j - i \eta_j = -\gamma_j \omega_j - i \omega_j \sqrt{1 - \gamma_j^2} , \quad (36)$$

a wielkości  $\gamma_j \cdot \omega_j$  interpolować odpowiednio jako modalne (bezwymiarowe) współczynniki tłumienia i częstość drgań własnych tłumionych. Można napisać następujący układ 2 równań ze względu na  $\gamma_j \cdot \omega_j$ :

$$-\gamma_j \omega_j + i \omega_j \sqrt{1 - \gamma_j^2} = \mu_j + i \eta_j , \quad (37)$$

$$-\gamma_j \omega_j - i \omega_j \sqrt{1 - \gamma_j^2} = \mu_j - i \eta_j . \quad (38)$$

Po rozwiązaniu tych równań otrzymuje się:

$$\gamma_j = -\frac{\mu_j}{\omega_j} ; \quad \omega_j^2 = \mu_j^2 + \eta_j^2 . \quad (39)$$

Niekiedy wartości własne  $\lambda_j$  są liczbami rzeczywistymi. Występuje wtedy tzw. tłumienie nadkrytyczne postaci drgań tłumionych o numerze  $j$ . W takich przypadkach korzystamy z innych wzorów. Równania (37) i (38) przyjmą teraz postać:

$$\lambda_j = -\gamma_j \omega_j + \omega_j \sqrt{\gamma_j^2 - 1} , \quad (40)$$

$$\lambda_{j+n} = -\gamma_j \cdot \omega_j - \omega_j \sqrt{\gamma_j^2 - 1} . \quad (41)$$

Z powyższych równań wynika, że

$$\omega_j = \sqrt{\lambda_j \cdot \lambda_{j+n}} , \quad \gamma_j = -\frac{\lambda_j + \lambda_{j+n}}{2\omega_j} . \quad (42)$$

## 6. Opis zastosowanej procedury optymalizacyjnej

Na wstępie wyznaczono częstości i postacie drgań własnych ramy metodą klasyczną, tzn. pomijając w równaniu ruchu siły tłumienia. Następnie wyznaczono częstości drgań własnych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy bez tłumików drgań, ale z uwzględnieniem właściwości tłumiących ramy. Macierz tłumienia miała w tym przypadku postać daną wzorem (12). Wykonano również obliczenia częstości drgań i bezwymiarowych współczynników tłumienia ramy z równomiernie rozmieszczonymi tłumikami drgań. W tym przypadku na każdej kondygnacji jest umieszczony 1 tłumik. Po wykonaniu tych obliczeń przystąpiono do obliczeń zmierzających do określenia optymalnego (w sensie przyjętych kryteriów) rozmieszczenia tłumików na konstrukcji.

Do rozwiązania zadania optymalizacyjnego użyto metody tzw. optymalizacji sekwencyjnej opisanej w pracy [3]. Jest to procedura heurystyczna. Ogólnie rzecz biorąc polega ona na umieszczaniu w optymalnym miejscu jednego tłumika drgań za pomocą pewnego postępowania rekurencyjnego przy założeniu, że nie zmienia się ustawienia tłumików uprzednio już ustawionych. Nie ma formalnego dowodu, że uzyskana w ten sposób konfiguracja tłumików będzie konfiguracją optymalną. Opisana procedura optymalizacyjna jest jednak często stosowana. Składa się ona z kilku opisanych poniżej kroków.

Założmy, że w wyniku dotychczasowych obliczeń ustalono pozycje  $r-1$  tłumików. Optymalne ustawienie tłumika o numerze  $r$  wymaga wykonania następujących czynności:

*Krok 1:*

Wyznaczyć częstości drgań własnych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia przy założeniu, że 1 tłumik został umieszczony na 1 kondygnacji. Obliczyć dla tego ustawienia wartość funkcji celu.

*Krok 2:*

Powtórzyć obliczenia wykonane w kroku 1 dla wszystkich możliwych położań tłumików.

*Krok 3:*

Jako optymalne położenie tłumika o numerze  $r$  wybrać to położenie, dla którego wartość funkcji celu jest maksymalna.

*Krok 4:*

Jeżeli wszystkie tłumiki zostały rozmieszczone na ramie to zakończyć obliczenia. W przeciwnym wypadku wrócić do kroku 1 i przystąpić do optymalnego ustawiania tłumika o numerze  $r+1$ .

Nie ma formalnego dowodu, że omawiana procedura prowadzi do wyznaczenia rozwiązania optymalnego. W szeregu zadaniach udało się jednak uzyskać rozwiązania w sposób istotny lepsze od rozwiązań przyjmowanych intuicyjnie lub na podstawie doświadczenia inżynierskiego.

## 7. Zestawienie danych przyjętych do obliczeń

Obliczenia wykonywane są dla ramy dziesięciokondygnacyjnej opisanej w pracy [4]. Masy wszystkich pięter są jednakowe i wynoszą  $M_1 = M_2 = \dots = M_{10} = 2070,0 \text{ kg}$ . Sztywności pięter są różne i wynoszą:

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 &= 68710,0 \text{ kN/m}, & k_3 = k_4 &= 54010,0 \text{ kN/m}, \\ k_5 = k_6 &= 42170,0 \text{ kN/m}, & k_7 = k_8 &= 28660,0 \text{ kN/m}, \\ k_9 = k_{10} &= 16450,0 \text{ kN/m}. \end{aligned}$$

Do obliczeń przyjęć następujące wartości współczynników tłumienia opisujące właściwości tłumiące konstrukcji:

$$\begin{aligned} c_1 = c_2 &= 4,76 \text{ kNs/m}, & c_3 = c_4 &= 3,73 \text{ kNs/m}, \\ c_5 = c_6 &= 2,91 \text{ kNs/m}, & c_7 = c_8 &= 1,98 \text{ kNs/m}, \\ c_9 = c_{10} &= 1,44 \text{ kNs/m}. \end{aligned}$$

Na konstrukcji rozmieszczano 10 tłumików wiskotycznych. Wszystkie tłumiki mają identyczne współczynniki tłumienia o wartości  $c_t = 50,0 \text{ kNs/m}$ .

## 8. Wyniki obliczeń

### 8.1. Częstości i postacie drgań własnych, nietłumionych

Częstości i postacie drgań własnych, nietłumionych wyznaczono rozwiązując równanie

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (43)$$

Po wykonaniu stosownych obliczeń otrzymano następujące częstości drgań własnych:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 22,690 \text{ rad/sek}, & \omega_2 &= 56,535 \text{ rad/sek}, \\ \omega_3 &= 91,909 \text{ rad/sek}, & \omega_4 &= 127,472 \text{ rad/sek}, \\ \omega_5 &= 151,769 \text{ rad/sek}, & \omega_6 &= 182,400 \text{ rad/sek}, \\ \omega_7 &= 208,638 \text{ rad/sek}, & \omega_8 &= 245,147 \text{ rad/sek}, \\ \omega_9 &= 281,525 \text{ rad/sek}, & \omega_{10} &= 324,052 \text{ rad/sek}. \end{aligned}$$

Otrzymano również następujące wektory własne (wektory postaci drgań):

1 wektor własny

$$\mathbf{a}_1 = \text{col}(0,083602; 0,165907; 0,267340; 0,363498; 0,477467; 0,579369; 0,707763; 0,809839; 0,935214; 1,000000)$$

2 wektor własny

$$\mathbf{a}_2 = \text{col}(0,207265; 0,394572; 0,584525; 0,702875; 0,744177; 0,668725; 0,403330; 0,044827; -0,597804; -1,000000)$$

3 wektor własny

$$\mathbf{a}_3 = \text{col}(-0,388356; -0,677879; -0,826737; -0,707936; -0,262232; 0,292208; 0,929724; 1,000000; 0,059465; -0,944280)$$

4 wektor własny

$$\mathbf{a}_4 = \text{col}(0,572924; 0,865385; 0,698515; 0,096635; -0,751312; \\ -1,000000; -0,192311; 0,841075; 0,921736; -0,882287)$$

5 wektor własny

$$\mathbf{a}_5 = \text{col}(-0,314479; -0,410731; -0,170587; 0,220151; 0,471680; \\ 0,189898; -0,540635; -0,371744; 1,000000; -0,526737)$$

6 wektor własny

$$\mathbf{a}_6 = \text{col}(0,755999; 0,754257; -0,209713; -0,906278; -0,318364; \\ 0,789474; 0,522476; -1,000000; 0,533989; -0,167577)$$

7 wektor własny

$$\mathbf{a}_7 = \text{col}(-0,506603; -0,348843; 0,433843; 0,492733; -0,484690; \\ -0,426451; 1,000000; -0,717541; 0,220491; -0,049243)$$

8 wektor własny

$$\mathbf{a}_8 = \text{col}(-0,614539; -0,116439; 0,785424; -0,121780; -0,924447; \\ 1,000000; -0,508978; 0,191307; -0,035362; 0,005389)$$

9 wektor własny

$$\mathbf{a}_9 = \text{col}(0,714393; -0,276984; -0,696822; 1,000000; -0,717212; \\ 0,355853; -0,102283; 0,025085; -0,003191; 0,000356)$$

10 wektor własny

$$\mathbf{a}_{10} = \text{col}(-0,859411; 1,000000; -0,659137; 0,334508; -0,117122; \\ 0,034967; -0,006455; 0,001083; -0,000097; 0,000008)$$

## 8.2. Częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy bez tłumików drgań

Częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia wyznaczono rozwiązując liniowy problem własny (32) i korzystając ze wzorów (39). Macierz tłumienia  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k$  uwzględnia właściwości tłumiące konstrukcji i jest obliczana ze wzoru (12).

Po rozwiązaniu problemu własnego (32) okazało się, że wszystkie wartości własne  $\lambda_j$  są liczbami zespolonymi, parami sprzężonymi. Otrzymano następujące wyniki:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,11} &= -0,018169 \pm 22,6902 i , & \lambda_{2,12} &= -0,122314 \pm 56,5348 i , \\ \lambda_{3,13} &= -0,321325 \pm 91,9087 i , & \lambda_{4,14} &= -0,604772 \pm 127,470 i , \\ \lambda_{5,15} &= -0,929337 \pm 151,766 i , & \lambda_{6,16} &= -1,19758 \pm 182,396 i , \\ \lambda_{7,17} &= -1,52864 \pm 208,632 i , & \lambda_{8,18} &= -2,07651 \pm 245,139 i , \\ \lambda_{9,19} &= -2,73792 \pm 281,511 i , & \lambda_{10,20} &= -3,63252 \pm 324,032 i . \end{aligned}$$

Wyliczone za pomocą wzorów (39) częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia modalnego są równe:

$$\omega_1 = 22,6902 \text{ rad/sek} , \quad \gamma_1 = 0,000801 ,$$

$$\begin{aligned}
 \omega_2 &= 56,5349 \text{ rad/sek} , & \gamma_2 &= 0,002164 , \\
 \omega_3 &= 91,9093 \text{ rad/sek} , & \gamma_3 &= 0,003496 , \\
 \omega_4 &= 127,471 \text{ rad/sek} , & \gamma_4 &= 0,004744 , \\
 \omega_5 &= 151,769 \text{ rad/sek} , & \gamma_5 &= 0,006123 , \\
 \omega_6 &= 182,400 \text{ rad/sek} , & \gamma_6 &= 0,006566 , \\
 \omega_7 &= 208,638 \text{ rad/sek} , & \gamma_7 &= 0,007327 , \\
 \omega_8 &= 245,148 \text{ rad/sek} , & \gamma_8 &= 0,008470 , \\
 \omega_9 &= 281,524 \text{ rad/sek} , & \gamma_9 &= 0,009725 , \\
 \omega_{10} &= 324,052 \text{ rad/sek} , & \gamma_{10} &= 0,011210 .
 \end{aligned}$$

Z porównania dotychczasowych wyników obliczeń dla ramy traktowanej jako układ nie-tłumiony i tłumiony wynikają następujące wnioski:

- częstości drgań własnych ramy bez i z uwzględnieniem sił tłumienia są identyczne,
- omawiana rama jest układem o bardzo małym tłumieniu (tłumienie 10 postaci drgań wynosi zaledwie 1,1% tłumienia krytycznego).

### **8.3. Częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy z równomiernie rozmieszczonymi tłumikami drgań**

Przedstawione poniżej wyniki obliczeń dotyczą ramy na której równomiernie rozmieszczono 10 tłumików tzn. założono, że na każdym piętrze zainstalowany jest jeden tłumik.

Częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia wyznaczono rozwiązując liniowy problem własny (32) i korzystając ze wzorów (39). Macierz tłumienia ma teraz postać  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k + \mathbf{C}_t$  i uwzględnia właściwości tłumiące konstrukcji i tłumików zainstalowanych na ramie. Jest obliczana za pomocą wzorów (12), (16), (17) i (18).

Po rozwiązaniu problemu własnego (32) okazało się, że wszystkie wartości własne  $\lambda_j$  są liczbami zespolonymi, parami sprzężonymi. Otrzymano następujące wyniki:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,11} &= -0,344170 \pm 22,6903 i , & \lambda_{2,12} &= -3,20837 \pm 56,5237 i , \\
 \lambda_{3,13} &= -8,23718 \pm 91,7106 i , & \lambda_{4,14} &= -14,6204 \pm 127,519 i , \\
 \lambda_{5,15} &= -29,5443 \pm 149,635 i , & \lambda_{6,16} &= -25,0516 \pm 180,059 i , \\
 \lambda_{7,17} &= -35,4198 \pm 204,262 i , & \lambda_{8,18} &= -37,7974 \pm 241,719 i , \\
 \lambda_{9,19} &= -41,9710 \pm 277,804 i , & \lambda_{10,20} &= -46,4436 \pm 320,214 i .
 \end{aligned}$$

Wyliczone za pomocą wzorów (39) częstości drgań własnych tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia modalnego są równe:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 22,6929 \text{ rad/sek} , & \gamma_1 &= 0,015166 , \\
 \omega_2 &= 56,6147 \text{ rad/sek} , & \gamma_2 &= 0,056670 , \\
 \omega_3 &= 92,0798 \text{ rad/sek} , & \gamma_3 &= 0,089457 , \\
 \omega_4 &= 128,354 \text{ rad/sek} , & \gamma_4 &= 0,113906 ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_5 &= 152,524 \text{ rad/sek} , & \gamma_5 &= 0,193703 , \\
 \omega_6 &= 181,793 \text{ rad/sek} , & \gamma_6 &= 0,137803 , \\
 \omega_7 &= 207,310 \text{ rad/sek} , & \gamma_7 &= 0,170854 , \\
 \omega_8 &= 244,656 \text{ rad/sek} , & \gamma_8 &= 0,154492 , \\
 \omega_9 &= 280,957 \text{ rad/sek} , & \gamma_9 &= 0,149386 , \\
 \omega_{10} &= 323,564 \text{ rad/sek} , & \gamma_{10} &= 0,143537 .
 \end{aligned}$$

Porównując wyniki przedstawione w podpunktach 8.1, 8.3 i 8.4 można sformułować następujące wnioski:

- częstości drgań własnych, tłumionych ramy z dziesięcioma tłumikami rozłożonymi równomiernie nie różnią się w sposób istotny od częstości drgań własnych nietłumionych i częstości drgań własnych tłumionych ramy bez tłumików; maksymalna różnica między tymi częstościami nie przekracza 1%,
- bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy z zainstalowanymi tłumikami drgań wzrosły wielokrotnie w porównaniu z bezwymiarowymi współczynnikami tłumienia ramy bez tłumików,
- bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy z tłumikami nie wzrosły równomiernie; np. współczynnik  $\gamma_5$  zwiększył się 32 razy, a współczynnik  $\gamma_{10}$  wzrósł 13-krotnie,
- bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej postaci drgań, mającej zwykle najistotniejszy udział w odpowiedzi dynamicznej układu wzrósł 19 razy.

#### 8.4. Wyniki optymalizacji – kryterium 1 (maksymalizacja bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań – wzór (1))

Na początku procedury optymalizacyjnej zakłada się, że na ramie nie ma zainstalowanych tłumików drgań. Teraz ustawia się jeden tłumik na kolejnych piętrach i oblicza się bezwymiarowy współczynnik tłumienia 1 postaci drgań. Macierz tłumienia ma postać  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k + \mathbf{C}_t$ , przy czym przykładowo

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

jeżeli tłumik jest umieszczony odpowiednio na pierwszej, a potem na drugiej kondygnacji.

Jeżeli tłumik jest ustawiony na 1 kondygnacji to wartościami własnymi problemu własnego (32) są:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,11} &= -0,401871 \pm 22,6905 i , & \lambda_{2,12} &= -0,268007 \pm 56,5395 i , \\
 \lambda_{3,13} &= -0,707357 \pm 91,9271 i , & \lambda_{4,14} &= -1,32239 \pm 127,511 i ,
 \end{aligned}$$

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

$$\begin{aligned} \lambda_{5,15} &= -1,44547 \pm 151,793 i, & \lambda_{6,16} &= -2,80084 \pm 182,468 i, \\ \lambda_{7,17} &= -2,64429 \pm 208,619 i, & \lambda_{8,18} &= -3,52076 \pm 245,149 i, \\ \lambda_{9,19} &= -5,01892 \pm 281,456 i, & \lambda_{10,20} &= -7,47815 \pm 323,510 i. \end{aligned}$$

Bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej postaci drgań wynosi:  $\gamma_1 = 0,001771$ .

W podobny sposób obliczono bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej postaci drgań dla innych ustawień tłumika. W rezultacie otrzymano:

$\gamma_1 = 0,001771$	jeżeli tłumik jest ustawiony na 1 kondygnacji,
$\gamma_1 = 0,001739$	jeżeli tłumik jest ustawiony na 2 kondygnacji,
$\gamma_1 = 0,002229$	jeżeli tłumik jest ustawiony na 3 kondygnacji,
$\gamma_1 = 0,002081$	jeżeli tłumik jest ustawiony na 4 kondygnacji,
$\gamma_1 = 0,002605$	jeżeli tłumik jest ustawiony na 5 kondygnacji,
$\gamma_1 = 0,002242$	jeżeli tłumik jest ustawiony na 6 kondygnacji,
$\gamma_1 = \mathbf{0,003087}$	jeżeli tłumik jest ustawiony na 7 kondygnacji,
$\gamma_1 = 0,002245$	jeżeli tłumik jest ustawiony na 8 kondygnacji,
$\gamma_1 = 0,002973$	jeżeli tłumik jest ustawiony na 9 kondygnacji,
$\gamma_1 = 0,001379$	jeżeli tłumik jest ustawiony na 10 kondygnacji.

Z powyższego zestawienia wynika, że 1 tłumik powinien być ustawiony na 7 kondygnacji. Dla tego położenia tłumika wartości funkcji celu wynosi  $I = 0,003087$ . Zauważmy, że najmniejszą wartość  $\gamma_1$  otrzymuje się dla tłumika ustawionego na 10 kondygnacji. Wartość  $\gamma_1$  dla tłumika umieszczonego optymalnie wzrosła 123 % w stosunku do tłumika ustawionego najmniej korzystnie.

W następnej kolejności obliczono bezwymiarowe współczynniki tłumienia pierwszej postaci drgań przy założeniu, że na ramie są umieszczone 2 tłumiki drgań; 1 o ustalonej pozycji (umieszczony na 7 kondygnacji) i 1 umieszczany kolejno na wszystkich kondygnacjach (łącznie z 7 kondygnacją). Wyniki obliczeń przedstawiono w Tablicy 1. Wszystkie wartości własne rozwiązywanych problemów własnych były liczbami zespolonymi sprzężonymi.

Tablica 1 Wyniki obliczeń dla ramy z 2 tłumikami drgań (1 tłumik umieszczony na stałe na 7 kondygnacji i 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Pierwsza wartość własna	Wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań
1	$- 0,092083 + 22,6920 i$	0,004058
2	$- 0,091407 + 22,6920 i$	0,004028
3	$- 0,102479 + 22,6922 i$	0,004516
4	$- 0,099192 + 22,6922 i$	0,004371
5	$-0,110988 + 22,6924 i$	0,004891
6	$-0,102775 + 22,6924 i$	0,004529

7	$-0,121573 + 22,6974 i$	<b>0,0053562</b>
8	$-0,102849 + 22,6929 i$	0,0045322
9	$-0,119409 + 22,6949 i$	0,0052614
10	$-0,083218 + 22,6928 i$	0,0036671

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że 2 tłumik powinien także być ustawiony na 7 kondygnacji. Najmniej korzystne byłoby ustawienie 2 tłumika na 10 kondygnacji, a wartość  $\gamma_1$  dla tłumika umieszczonego optymalnie jest o 46 % większa w stosunku do sytuacji, w której 2 tłumik jest umieszczony na 10 kondygnacji.

W Tablicy 2 zestawiono wyniki obliczeń dla ramy z dwoma tłumikami ustawionymi na stałe (oba na 7 kondygnacji) i 1 tłumika zmieniającego swoje położenie.

Tablica 2 Wyniki obliczeń dla ramy z 3 tłumikami drgań (2 tłumiki umieszczone na stałe na 7 kondygnacji i 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Pierwsza wartość własna	Wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań
1	$-0,143624 + 22,6972 i$	0,006328
2	$-0,14953 + 22,6972 i$	0,006298
3	$-0,154062 + 22,6971 i$	0,006788
4	$-0,150771 + 22,6972 i$	0,0066434
5	$-0,162582 + 22,6974 i$	0,007163
6	$-0,154351 + 22,6975 i$	0,006800
7	$-0,172384 + 22,7064 i$	<b>0,007592</b>
8	$-0,154437 + 22,6980 i$	0,0068044
9	$-0,171031 + 22,6999 i$	0,0075342
10	$-0,134775 + 22,6981 i$	0,005938

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, z przeprowadzonych obliczeń wynika, że tłumik powinien być także ustawiony na 7 kondygnacji. Najmniej korzystne jest ustawienie 3 tłumika na 10 kondygnacji. Różnice w wartości bezwymiarowego współczynnika tłumienia  $\gamma_1$  są jednak mniejsze i wynoszą 28 % dla położenia najbardziej i najmniej korzystnego.

Wyniki obliczeń dla ramy z czterema tłumikami (3 ustawionymi na stałe na 7 kondygnacji i jednym zmieniającym położenie) zestawiono w Tablicy 3. Ponownie wyniki obliczeń wskazują 7 kondygnację jako miejsce optymalnego ustawienia tłumika. Widać, że prawie taką samą wartość  $\gamma_1$  uzyskuje się ustawiając ten tłumik na 9 kondygnacji.

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

Tablica 3 Wyniki obliczeń dla ramy z 4 tłumikami drgań (3 umieszczone na stałe na 7 kondygnacji i 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Pierwsza wartość własna	Wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań
1	$- 0,19451 + 22,7059 i$	0,008566
2	$- 0,193828 + 22,7059 i$	0,008536
3	$- 0,204832 + 22,7057 i$	0,009021
4	$- 0,201658 + 22,7059 i$	0,008881
5	$-0,213497 + 22,7059 i$	0,0094012
6	$-0,205243 + 22,7062 i$	0,009387
7	$-0,222143 + 22,7189 i$	<b>0,009777</b>
8	$-0,205325 + 22,7068 i$	0,0090426
9	$-0,221982 + 22,7084 i$	0,009774
10	$-0,185624 + 22,7070 i$	0,008174

Wyniki kolejnych obliczeń zmierzających do określenia optymalnej pozycji pozostałych tłumików zestawiono w Tablicach 4-9.

Tablica 4 Wyniki obliczeń dla ramy z 5 tłumikami drgań (4 tłumiki umieszczone na stałe na 7 kondygnacji i 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Pierwsza wartość własna	Wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań
1	$- 0,244346 + 22,7181 i$	0,010755
2	$- 0,243662 + 22,7181 i$	0,010725
3	$- 0,254824 + 22,7178 i$	0,011216
4	$- 0,251489 + 22,7180 i$	0,011069
5	$-0,263383 + 22,7180 i$	0,011593
6	$-0,255097 + 22,7184 i$	0,011228
7	$-0,270524 + 22,7347 i$	0,011898
8	$-0,255185 + 22,7190 i$	0,011232
9	$-0,271917 + 22,7205 i$	<b>0,011967</b>

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

10	$-0,235443 + 22,7194 i$	0,010362
----	-------------------------	----------

Tablica 5 Wyniki obliczeń dla ramy z 6 tłumikami drgań (4 tłumiki umieszczone na stałe na 7 kondygnacji, 1 tłumik na 9 kondygnacji i 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Pierwsza wartość własna	Wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań
1	$- 0,294123 + 22,7193 i$	0,012945
2	$- 0,293437 + 22,7194 i$	0,012915
3	$- 0,304604 + 22,7190 i$	0,013406
4	$- 0,301288 + 22,7192 i$	0,013260
5	$-0,313171 + 22,7190 i$	0,013783
6	$-0,30488 + 22,7196 i$	0,013418
7	$-0,320507 + 22,7359 i$	0,014096
8	$-0,304980 + 22,7203 i$	0,013422
9	$-0,320655 + 22,7288 i$	<b>0,014106</b>
10	$-0,285208 + 22,7209 i$	0,012552

Tablica 6 Wyniki obliczeń dla ramy z 7 tłumikami drgań (4 tłumiki umieszczone na stałe na 7 kondygnacji, 2 tłumiki na 9 kondygnacji i 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Pierwsza wartość własna	Wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań
1	$- 0,342908 + 22,7273 i$	0,015086
2	$- 0,342213 + 22,7274 i$	0,015056
3	$- 0,353414 + 22,7268 i$	0,015549
4	$- 0,350091 + 22,7271 i$	0,015402
5	$-0,362001 + 22,7268 i$	0,015926
6	$-0,353697 + 22,7275 i$	0,015561
7	$-0,369527 + 22,7438 i$	<b>0,016245</b>
8	$-0,353777 + 22,7284 i$	0,015564

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

9	$-0,367093 + 22,7434 i$	0,016138
10	$-0,333967 + 22,7292 i$	0,014692

Tablica 7 Wyniki obliczeń dla ramy z 8 tłumikami drgań (5 tłumików umieszczonych na stałe na 7 kondygnacji, 2 tłumiki na 9 kondygnacji i 1 tłumik przedstawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przedstawiany tłumik drgań	Pierwsza wartość własna	Wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań
1	$- 0,391863 + 22,7421 i$	0,017228
2	$- 0,391178 + 22,7421 i$	0,017198
3	$- 0,402407 + 22,7415 i$	0,017692
4	$- 0,399070 + 22,7418 i$	0,017545
5	$-0,411023 + 22,7414 i$	0,018071
6	$-0,402682 + 22,7422 i$	0,017704
7	$-0,416797 + 22,7620 i$	<b>0,018308</b>
8	$-0,402766 + 22,7432 i$	0,017706
9	$-0,416288 + 22,7581 i$	0,018289
10	$-0,382891 + 22,7441 i$	0,016832

Tablica 8 Wyniki obliczeń dla ramy z 9 tłumikami drgań (6 tłumików umieszczonych na stałe na 7 kondygnacji, 2 tłumiki na 9 kondygnacji i 1 tłumik przedstawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przedstawiany tłumik drgań	Pierwsza wartość własna	Wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań
1	$- 0,439214 + 22,7600 i$	0,019294
2	$- 0,438523 + 22,7601 i$	0,019264
3	$- 0,449806 + 22,7593 i$	0,019760
4	$- 0,446450 + 22,7597 i$	0,019612
5	$-0,458454 + 22,7592 i$	0,020140
6	$-0,450068 + 22,7601 i$	0,019770

7	$-0,462111 + 22,7832 i$	0,020279
8	$-0,450150 + 22,7611 i$	0,019773
9	$-0,463898 + 22,7760 i$	<b>0,020364</b>
10	$-0,430198 + 22,7622 i$	0,018896

Tablica 9 Wyniki obliczeń dla ramy z 10 tłumikami drgań (6 tłumików umieszczonych na stałe na 7 kondygnacji, 3 tłumiki na 9 kondygnacji i 1 tłumik przedstawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przedstawiany tłumik drgań	Pierwsza wartość własna	Wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań
1	$-0,486422 + 22,7737 i$	0,021354
2	$-0,485725 + 22,7738 i$	0,021323
3	$-0,497056 + 22,7729 i$	0,021821
4	$-0,493688 + 22,7733 i$	0,021673
5	$-0,505719 + 22,7727 i$	0,022202
6	$-0,497297 + 22,7738 i$	0,021831
7	$-0,509609 + 22,7970 i$	<b>0,022349</b>
8	$-0,497371 + 22,7750 i$	0,021833
9	$-0,507690 + 22,7957 i$	0,022266
10	$-0,477350 + 22,7762 i$	0,020954

Z przedstawionych powyżej wyników obliczeń wynika, że optymalnym, w sensie kryterium 1, jest umieszczenie 7 tłumików na 7 kondygnacji i 3 tłumików na 9 kondygnacji. Dla takiego ustawienia tłumików bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej postaci drgań jest równy 0,022349. Jest on około 47% większy od bezwymiarowego współczynnika tłumienia pierwszej postaci drgań ramy, na której ustawiono po jednym tłumiku na każdej kondygnacji.

Wypada także zauważyć, że jeżeli położenie większości tłumików zostało ustalone to bezwymiarowy współczynnik tłumienia  $\gamma_1$  w małym stopniu zależy od ustawienia kolejnego tłumika. Przykładowo, jeżeli położenie 8 tłumików jest ustalone to różnica w wartości  $\gamma_1$  dla położenia najbardziej i najmniej korzystnego wynosi 7,8%.

Porównajmy jeszcze miejsca usytuowania tłumików z względnymi przemieszczeniami kondygnacji, jeżeli rama wykonuje drgania z pierwszą postacią drgań. Omawiane przemieszczenia są proporcjonalne do różnic między rzędnymi 1 postaci drgań i wynoszą:

$$a_1 - a_0 = 0,083602, \quad a_2 - a_1 = 0,082305,$$

## Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań

$$a_3 - a_2 = 0,101433 , \quad a_4 - a_3 = 0,096158 ;$$

$$a_5 - a_4 = 0,113969 , \quad a_6 - a_5 = 0,101902 ,$$

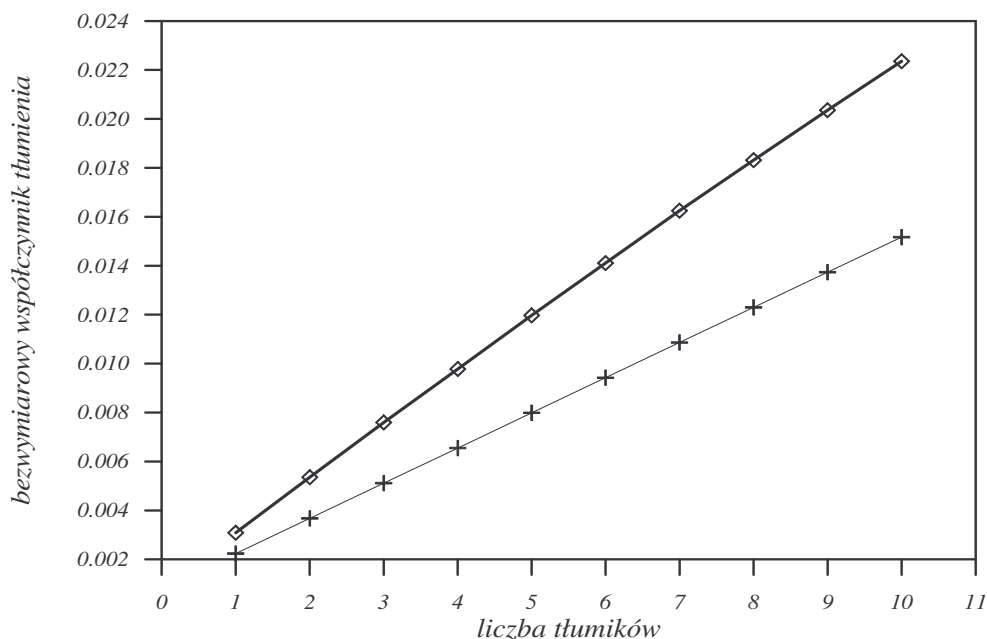
$$a_7 - a_6 = 0,128394 , \quad a_8 - a_7 = 0,102076 ,$$

$$a_9 - a_8 = 0,125375 , \quad a_{10} - a_9 = 0,064786 .$$

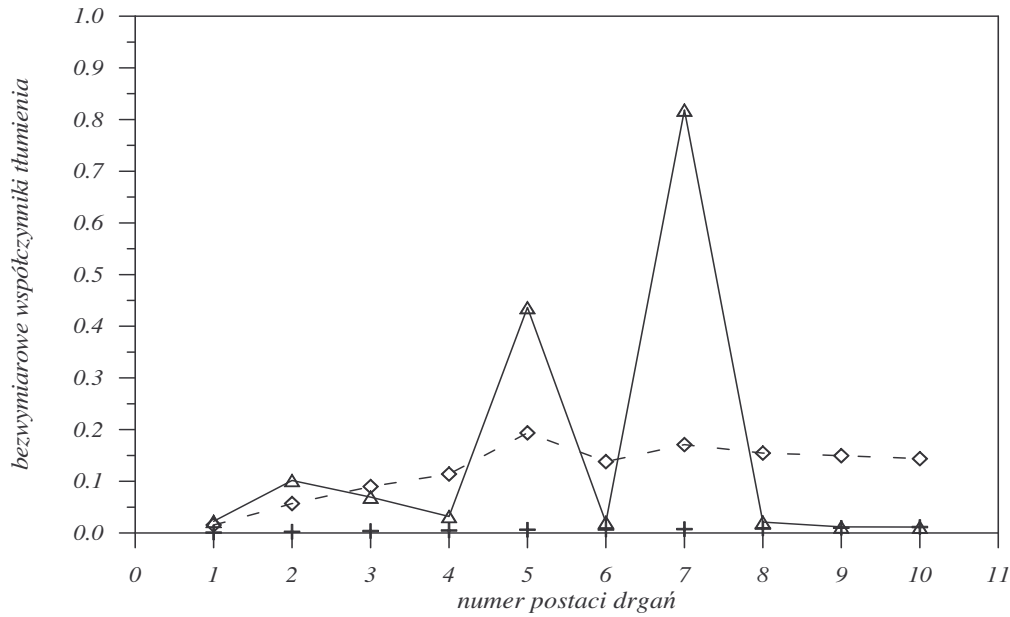
Łatwo można zauważyć, że w myśl rozpatrywanego kryterium tłumiki zostały umieszczone na tych kondygnacjach, na których różnice między rzędnymi 1 postaci drgań były największe.

Na rys. 4 linią ciągłą pogrubioną pokazano zmiany bezwymiarowego współczynnika tłumienia pierwszej postaci drgań w zależności od liczby tłumików umieszczonych na ramie. Na tym samym rysunku linią ciągłą cienką pokazano zmianę tego współczynnika przy założeniu, że na ramie jest 10 tłumików, ale ich współczynniki tłumienia są odpowiednio mniejsze. Przykładowo bezwymiarowy współczynnik tłumienia ramy z jednym tłumikiem umieszczonym w optymalnym miejscu odpowiada przypadkowi ramy z 10 tłumikami równomiernie rozłożonymi, ale o 10 krotnie mniejszych współczynnikach tłumienia. Widać, że optymalne rozmieszczenie tłumików w istotny sposób zwiększa omawiany współczynnik tłumienia. Widać również, że zadaną wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia da się osiągnąć instalując na ramie mniejszą liczbę tłumików, ale optymalnie rozstawionych.

Na rys. 5 pokazano bezwymiarowe współczynniki tłumienia różnych postaci drgań ramy z tłumikami rozmieszczonymi optymalnie (małe trójkąty) i dla ramy z tłumikami rozmieszczonymi równomiernie (małe romby). Dla porównania krzyżykami pokazano bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy bez tłumików. W rozwiązaniu uznanym za optymalne zwraca uwagę bardzo znaczny (w porównaniu z bezwymiarowymi współczynnikami tłumienia ramy z równomiernie rozłożonymi tłumikami drgań) wzrost bezwymiarowych współczynników tłumienia 5 i 7 postaci drgań. Ponadto widać, że w rozwiązaniu uznanym za optymalne bezwymiarowe współczynniki tłumienia 4, 6, 8, 9 i 10 postaci drgań niewiele się różnią od analogicznych współczynników tłumienia ramy bez tłumików. Widać, że rozstawienie tłumików uznane tutaj za optymalne będzie nieoptymalne, jeżeli udział wspomnianych postaci drgań w odpowiedzi dynamicznej ramy będzie znaczący.



Rys. 4. Zmiana bezwymiarowego współczynnika tłumienia pierwszej postaci drgań w zależności od liczby tłumików umieszczonych na ramie



Rys. 5. Bezwymiarowe współczynniki tłumienia ram z różnie rozmieszczonymi tłumikami drgań

### 8.5. Wyniki optymalizacji wykonanej przy użyciu kryterium 2 (wagi funkcji celu (2) określone wg wariantu 1)

Używając sposobu pokazanego w poprzednich punktach opracowania wykonano obliczenia posługując się funkcją celu (3). Współczynniki wagowe funkcji celu  $\alpha_i$  wyznaczono ze wzoru (28). Współczynniki wagowe są tak dobrane by reprezentowały udział poszczególnych postaci drgań w przemieszczeniu stropu najwyższej kondygnacji ramy. Wartości współczynników wagowych wyznaczone ze wspomnianego wzoru wynoszą:

$$\alpha_1 = 1.06258 ; \quad \alpha_2 = - 0.073652 ; \quad \alpha_3 = 0.014094 ; \quad \alpha_4 = - 0.004486$$

$$\alpha_5 = 0.001744 ; \quad \alpha_6 = - 0.000342; \quad \alpha_7 = 0.000061; \quad \alpha_8 = - 0.000004$$

$$\alpha_9 = 0.00000; \quad \alpha_{10} = 0.00000$$

Wyniki obliczeń zestawiono w tablicach 10 – 19. W tablicach tych oprócz wartości funkcji celu dla różnych położeń ustawianego tłumika drgań podano również bezwymiarowe współczynniki tłumienia dla położenia optymalnego.

Tablica 10. Wyniki obliczeń dla ramy z 1 przestawianym tłumikiem drgań

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Optymalnie ustawiony tłumik drgań	
		Numer wartości własnej	Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia
1	0.0016067	1	0.0030870
2	0.0016022	2	0.0063597
3	0.0020925	3	0.0146504

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

4	0.0020181	4	0.0156131
5	0.0026599	5	0.0245415
6	0.0023478	6	0.0075855
7	<b>0.0029914</b>	7	0.0521238
8	0.0016170	8	0.0426660
9	0.0016890	9	0.0124951
10	0.0009269	10	0.0112355

Tablica 11. Wyniki obliczeń dla ramy z 2 tłumikami drgań (1 tłumik na 7 kondygnacji + 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Optymalnie ustawiony tłumik drgań	
		Numer wartości własnej	Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia
1	0.0038728	1	0.0053562
2	0.0038645	2	0.0103595
3	0.0043575	3	0.0247159
4	0.0042805	4	0.0243346
5	0.0049314	5	0.0427356
6	0.0046162	6	0.0082344
7	<b>0.0052468</b>	7	0.1268402
8	0.0038710	8	0.0546913
9	0.0039464	9	0.0133516
10	0.0031560	10	0.0112518

Tablica 12. Wyniki obliczeń dla ramy z 3 tłumikami drgań (2 tłumiki na 7 kondygnacji + 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Optymalnie ustawiony tłumik drgań	
		Numer wartości własnej	Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

1	0.0061355	1	0.0075914
2	0.0061242	2	0.0139883
3	0.0066158	3	0.0327133
4	0.0065419	4	0.0289470
5	0.0072002	5	0.0570663
6	0.0068798	6	0.0084668
7	<b>0.0074789</b>	7	0.2459430
8	0.0061039	8	0.0368128
9	0.0061845	9	0.0131098
10	0.0053561	10	0.0112581

Tablica 13. Wyniki obliczeń dla ramy z 4 tłumikami drgań (3 tłumiki na 7 kondygnacji + 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Optymalnie ustawiony tłumik drgań	
		Numer wartości własnej	Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia
1	0.0083805	1	0.0097774
2	0.0083623	2	0.0171126
3	0.0088604	3	0.0379885
4	0.0087860	4	0.0293298
5	0.0094527	5	0.0601474
6	0.0091338	6	0.0084527
7	<b>0.0096576</b>	7	0.3771438
8	0.0083064	8	0.0286415
9	0.0083915	9	0.0126509
10	0.0075057	10	0.0112582

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

Tablica 14. Wyniki obliczeń dla ramy z 5 tłumikami drgań (4 tłumiki na 7 kondygnacji + 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Optymalnie ustawiony tłumik drgań	
		Numer wartości własnej	Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia
1	0.0105747	1	0.0118983
2	0.0105485	2	0.0196519
3	0.0110421	3	0.0404924
4	0.0109789	4	0.0274845
5	0.0116519	5	0.0545800
6	0.0113354	6	0.0083402
7	<b>0.0117669</b>	7	0.5206030
8	0.0104657	8	0.0241673
9	0.0105294	9	0.0122326
10	0.0095793	10	0.0112555

Tablica 15 Wyniki obliczeń dla ramy z 6 tłumikami drgań (5 tłumików na 7 kondygnacji + 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Optymalnie ustawiony tłumik drgań	
		Numer wartości własnej	Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia
1	0.0126986	1	0.0139402
2	0.0126661	2	0.0215854
3	0.0131625	3	0.0407886
4	0.0130997	4	0.0251401
5	0.0137848	5	0.0479337
6	0.0134676	6	0.0082030
7	<b>0.0138063</b>	7	0.6678491

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

8	0.0125676	8	0.0213148
9	0.0125632	9	0.0118928
10	0.0115888	10	0.0112520

Tablica 16 Wyniki obliczeń dla ramy z 7 tłumikami drgań (6 tłumików na 7 kondygnacji + 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Optymalnie ustawiony tłumik drgań	
		Numer wartości własnej	Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia
1	0.0147517	1	0.0157696
2	0.0147140	2	0.0216488
3	0.0152122	3	0.0496027
4	0.0151504	4	0.0300014
5	<b>0.0158463</b>	5	0.0478289
6	0.0155255	6	0.0121793
7	0.0140063	7	0.6695457
8	0.0146038	8	0.0593685
9	0.0145209	9	0.0570366
10	0.0135473	10	0.0139363

Tablica 17 Wyniki obliczeń dla ramy z 8 tłumikami drgań (6 tłumików na 7 kondygnacji, 1 tłumik na 5 kondygnacji + 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Optymalnie ustawiony tłumik drgań	
		Numer wartości własnej	Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia
1	0.0167908	1	0.0175981
2	0.0167523	2	0.0217058
3	0.0172522	3	0.0585016
4	0.0171891	4	0.0335143

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

5	<b>0.0178926</b>	5	0.0470729
6	0.0175564	6	0.0147497
7	0.0178331	7	0.6722935
8	0.0166402	8	0.0962736
9	0.0165671	9	0.1081397
10	0.0155893	10	0.0148609

Tablica 18 Wyniki obliczeń dla ramy z 9 tłumikami drgań (6 tłumików na 7 kondygnacji, 2 tłumiki na 5 kondygnacji + 1 tłumik przestawiany)

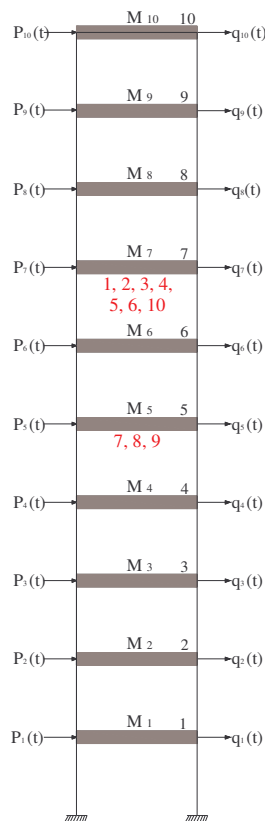
Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Optymalnie ustawiony tłumik drgań	
		Numer wartości własnej	Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia
1	0.0188356	1	0.0194203
2	0.0187976	2	0.0217523
3	0.0192987	3	0.0670590
4	0.0192347	4	0.0356414
5	<b>0.0199345</b>	5	0.0459220
6	0.0195958	6	0.0157153
7	0.0198999	7	0.6769580
8	0.0186855	8	0.0561083
9	0.0186157	9	0.2394860
10	0.0176404	10	0.0146959

Tablica 19 Wyniki obliczeń dla ramy z 10 tłumikami drgań (6 tłumików na 7 kondygnacji, 3 tłumiki na 5 kondygnacji + 1 tłumik przestawiany)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Optymalnie ustawiony tłumik drgań	
		Numer wartości własnej	Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia

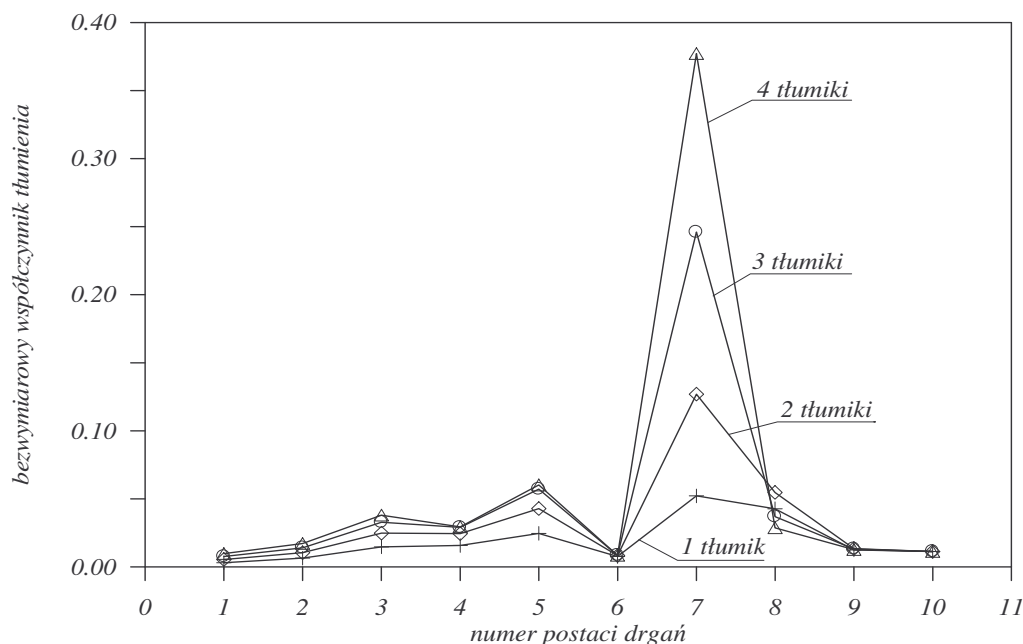
1	0.0208759	1	0.0213998
2	0.0208385	2	0.0230850
3	0.0213410	3	0.0679177
4	0.0212763	4	0.0331246
5	0.0219603	5	0.0407180
6	0.0216326	6	0.0155604
7	<b>0.0219630</b>	7	0.8234330
8	0.0207272	8	0.0567028
9	0.0206563	9	0.2359281
10	0.0196901	10	0.0147008

Z powyższych obliczeń wynika, że optymalne rozmieszczenie tłumików, dla którego rozważana funkcja celu ma wartość maksymalną, jest następujące (patrz rys.6): tłumiki nr 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 10 na 7 kondygnacji, tłumiki nr 7, 8, 9 na 5 kondygnacji. Ostatecznie **3** tłumiki znajdują się na **5 kondygnacji** i **7** tłumików na **7 kondygnacji**. Na rys. 6 podano kolejność umieszczania tłumików na odpowiednich kondygnacjach.



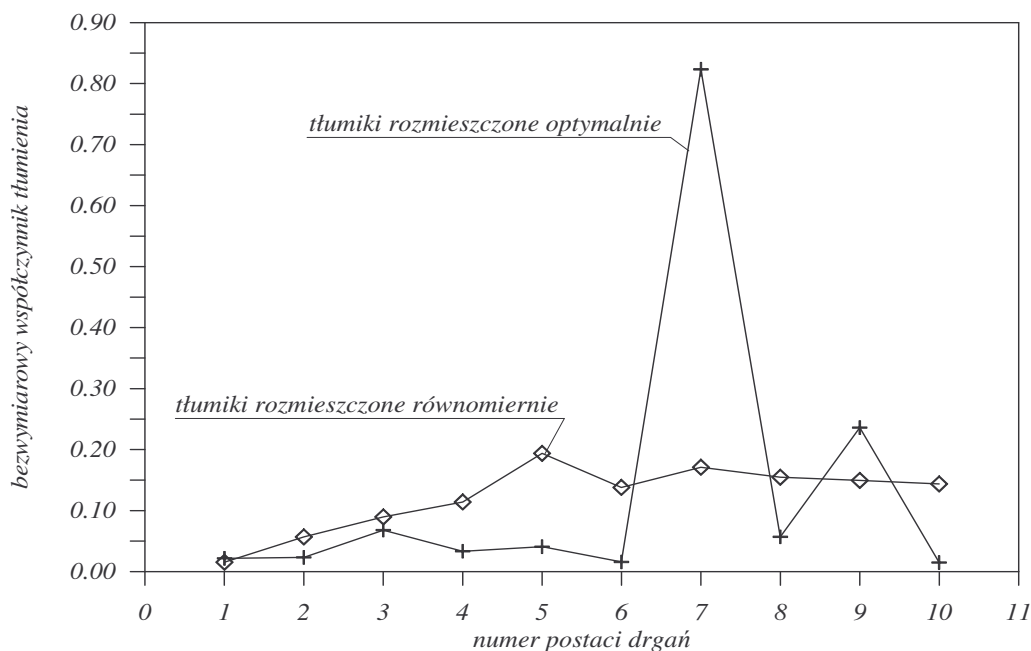
Rys. 6 Optymalne rozmieszczenie tłumików (kryterium 2, wagi funkcji celu wg wariantu 1)

Na rys. 7 pokazano, w jaki sposób zmieniają się bezwymiarowe współczynniki tłumienia w zależności od liczby optymalnie ustawionych tłumików drgań. Dodanie kolejnych tłumików w istotny sposób zwiększa bezwymiarowy współczynnik tłumienia 7 postaci drgań.



Rys. 7 Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia w zależności od liczby optymalnie rozmieszczonych tłumików (kryterium 2, wagi funkcji celu wg wariantu 1)

Na rys. 8 pokazano bezwymiarowe współczynniki tłumienia poszczególnych postaci drgań ramy z tłumikami rozmieszczonymi równomiernie oraz ramy z tłumikami rozmieszczonymi optymalnie z zastosowaniem funkcji celu (3) i współczynników wagowych obliczonych za pomocą wzoru (28). Bezwymiarowe współczynniki tłumienia 4 pierwszych postaci drgań ramy z optymalnie rozmieszczonymi tłumikami drgań są większe od odpowiednich współczynników tłumienia ramy z równomiernie rozstawionymi tłumikami drgań.



Rys. 8 Bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy z tłumikami w rozmieszczonymi optymalnie (krzyżyki) i z tłumikami rozmieszczonymi równomiernie (romby)

### 8.6. Wyniki optymalizacji wykonanej przy użyciu kryterium 2 (wagi funkcji celu (2) określone wg wariantu 2)

Używając ponownie sposobu używanego w poprzednich punktach opracowania wykonano obliczenia posługując się funkcją celu (3). Współczynniki wagowe  $\alpha_i$  wyznacza się teraz z wzoru (30). Po jego zastosowaniu otrzymano:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,757917, & \alpha_2 &= 0,130242, & \alpha_3 &= 0,049456, & \alpha_4 &= 0,024853, \\ \alpha_5 &= 0,008884, & \alpha_6 &= 0,013180, & \alpha_7 &= 0,005345, & \alpha_8 &= 0,003629, \\ \alpha_9 &= 0,003285, & \alpha_{10} &= 0,003209. \end{aligned}$$

Z powyższego zestawienia wynika, że w odpowiedzi dynamicznej ramy zasadniczy udział ma 1 i 2 postać drgań. Udział postaci drgań o numerach 5, 7, 8, 9 i 10 jest mniejszy od 1%.

Obliczenia wykonano w podobny sposób jak to opisano w poprzednich punktach. Zmianie uległa tylko funkcja celu, a dokładniej współczynniki wagowe. Jeżeli na konstrukcji znajdował się tylko 1 tłumik to wartości funkcji celu dla różnych lokalizacji tego tłumika zestawiono w Tabelicy 20. Z obliczeń wynika, że pierwszy tłumik należy ustawić na 9 kondygnacji. Wyniki obliczeń dla ramy z kolejno ustawianymi tłumikami przedstawiono w tablicach 21 – 29.

Tablica 20 Wyniki obliczeń dla ramy z 1 tłumikiem drgań o zmieniającym się usytuowaniu

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu
1	0,003137	6	0,003580
2	0,002845	7	0,005109
3	0,003333	8	0,004812
4	0,003101	9	<b>0,008680</b>
5	0,003808	10	0,006611

Tablica 21 Wyniki obliczeń dla ramy z 2 tłumikami drgań (1 o ustalonej lokalizacji – 9 kondygnacji i 1 o zmieniającym się usytuowaniu)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu
1	0,010362	6	0,010817
2	0,010072	7	0,012295
3	0,010552	8	0,012295

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

4	0,010330	9	<b>0,015473</b>
5	0,011025	10	0,013747

Tablica 22 Wyniki obliczeń dla ramy z 3 tłumikami drgań (2 o ustalonej lokalizacji – oba na 9 kondygnacji i 1 o zmieniającym się usytuowaniu)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu
1	0,017171	6	0,017653
2	0,016876	7	0,019065
3	0,017340	8	0,019590
4	0,017148	9	<b>0,021384</b>
5	0,017807	10	0,020739

Tablica 23 Wyniki obliczeń dla ramy z 4 tłumikami drgań (3 o ustalonej lokalizacji – wszystkie na 9 kondygnacji i 1 o zmieniającym się usytuowaniu)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu
1	0,023100	6	0,023551
2	0,022792	7	0,025001
3	0,023249	8	0,025198
4	0,023065	9	0,026023
5	0,023744	10	<b>0,027128</b>

Tablica 24 Wyniki obliczeń dla ramy z 5 tłumikami drgań (4 o ustalonej lokalizacji – 3 na 9 kondygnacji, 1 na 10 kondygnacji i 1 o zmieniającym się usytuowaniu)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu
1	0,028832	6	0,029258
2	0,028540	7	0,030846

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

3	0,028999	8	0,030921
4	0,028812	9	0,032485
5	0,029465	10	<b>0,032494</b>

Tablica 25 Wyniki obliczeń dla ramy z 6 tłumikami drgań (5 o ustalonej lokalizacji – 3 na 9 kondygnacji, 2 na 10 kondygnacji i 1 o zmieniającym się usytuowaniu)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu
1	0,034197	6	0,034607
2	0,033905	7	0,036276
3	0,034374	8	0,036276
4	0,034179	9	<b>0,038532</b>
5	0,034812	10	0,037191

Tablica 26 Wyniki obliczeń dla ramy z 7 tłumikami drgań (6 o ustalonej lokalizacji – 4 na 9 kondygnacji, 2 na 10 kondygnacji i 1 o zmieniającym się usytuowaniu)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu
1	0,040244	6	0,040635
2	0,039957	7	0,042391
3	0,040426	8	0,042362
4	0,040215	9	0,043287
5	0,040827	10	<b>0,043935</b>

Tablica 27 Wyniki obliczeń dla ramy z 8 tłumikami drgań (7 o ustalonej lokalizacji – 4 na 9 kondygnacji, 3 na 10 kondygnacji i 1 o zmieniającym się usytuowaniu)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu
1	0,045647	6	0,046015

*Optymalizacja rozmieszczenia wiskotycznych tłumików drgań*

2	0,045364	7	0,047915
3	0,045838	8	0,047803
4	0,045612	9	<b>0,049367</b>
5	0,046191	10	0,048494

Tablica 28 Wyniki obliczeń dla ramy z 9 tłumikami drgań (8 o ustalonej lokalizacji – 5 na 9 kondygnacji, 3 na 10 kondygnacji i 1 o zmieniającym się usytuowaniu)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu
1	0,051102	6	0,051445
2	0,050820	7	0,053469
3	0,051289	8	0,053417
4	0,051042	9	0,053412
5	0,051597	10	<b>0,054535</b>

Tablica 29 Wyniki obliczeń dla ramy z 10 tłumikami drgań (9 o ustalonej lokalizacji – 5 na 9 kondygnacji, 4 na 10 kondygnacji i 1 o zmieniającym się usytuowaniu)

Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu	Numer kondygnacji na której umieszczono przestawiany tłumik drgań	Wartość funkcji celu
1	0,056282	6	0,056600
2	0,056001	7	0,058782
3	0,056470	8	0,058828
4	0,056209	9	<b>0,059140</b>
5	0,056739	10	0,058830

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że posługując się kryterium minimalizacji siły poprzecznej w słupach najniższej kondygnacji ramy dochodzi się do wniosku, że optymalne rozmieszczenie tłumików drgań jest następujące:

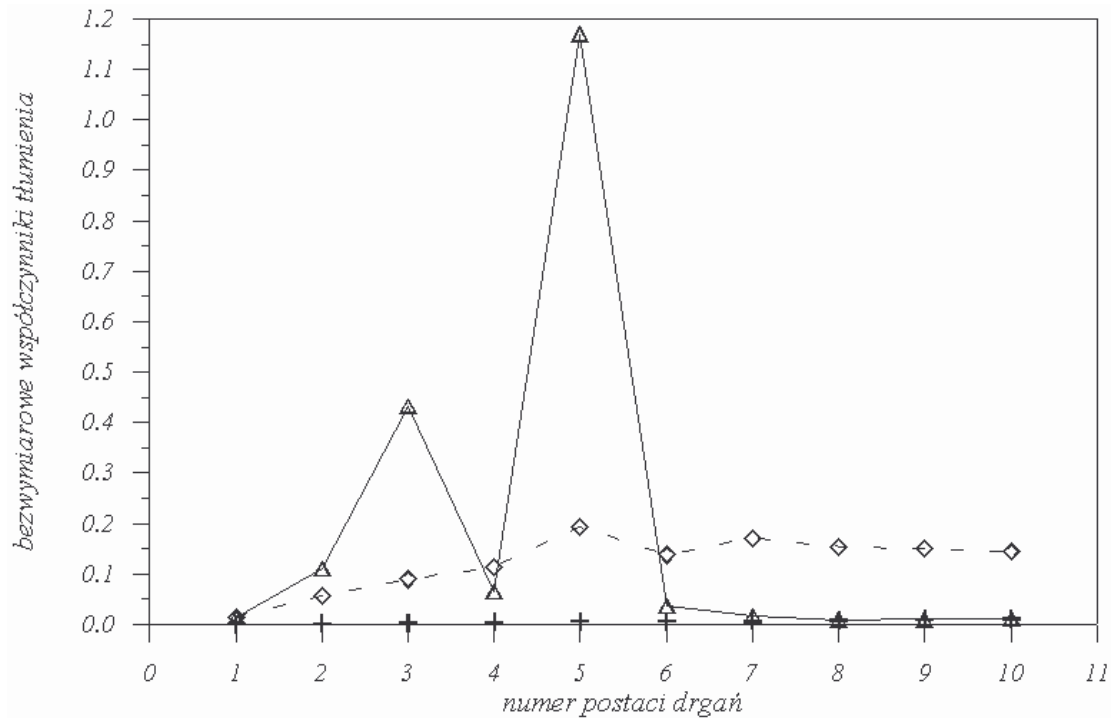
6 tłumików należy umieścić na 9 kondygnacji i  
4 tłumiki na 10 kondygnacji.

W tablicy 30 podano częstości drgań tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy z tłumikami ustawionymi w podany powyżej sposób. Na rys. 9 porównano bezwymia-

rowe współczynniki tłumienia dla ustawienia tłumików wynikającą z omawianych obliczeń z bezwymiarowymi współczynnikami tłumienia Ramy z równomiernie rozstawionymi tłumikami drgań. Widać, podobnie jak w przypadku kryterium, że dla niektórych postaci drgań (tutaj trzeciej i piątej) bezwymiarowy współczynnik jest wyraźnie większy od bezwymiarowych współczynników tłumienia pozostałych postaci drgań. Współczynnik tłumienia piątej postaci jest większy od tłumienia krytycznego. Zwracają też uwagę bardzo małe wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia wyższych postaci drgań.

Tablica 30 Wartości własne, częstości drgań tłumionych i bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy z 6 tłumikami umieszczonymi na 9 kondygnacji i 4 tłumikami umieszczonymi na 10 kondygnacji

Wartości własne	Częstość drgań własnych tłumionych	Bezwymiarowe współczynniki tłumienia
$-0,321969 + 22,8106 i$ $-0,321969 - 22,8106 i$	22,8129	0,014113
$-7,03828 + 63,4179 i$ $-7,03828 - 63,4179 i$	63,8073	0,110305
$-39,5427 + 82,3411 i$ $-39,5427 - 82,3411 i$	91,3438	0,432900
$-7,82255 + 121,516 i$ $-7,82255 - 121,516 i$	121,768	0,064242
$-87,3558$ $-275,602$	155,163	1,169605
$-6,24363 + 170,531 i$ $-6,24363 - 170,531 i$	170,645	0,036588
$-3,60146 + 202,779 i$ $-3,60146 - 202,779 i$	202,811	0,017758
$-2,28861 + 244,747 i$ $-2,28861 - 244,747 i$	244,758	0,009351
$-2,74429 + 281,503 i$ $-2,74429 - 281,503 i$	281,516	0,009748
$-3,63254 + 324,032 i$ $-3,63254 - 324,032 i$	324,052	0,011210



Rys. 9. Bezwymiarowe współczynniki tłumienia ram z różnie rozmieszczonymi tłumikami drgań (kryterium 2, wagi funkcji celu wg wzoru (29))

## 9. Uwagi końcowe

Praca dotyczy optymalnego rozmieszczania wiskotycznych tłumików drgań na konstrukcji ramowej. Do obliczeń zastosowano metodę optymalizacji sekwencyjnej i użyto różne postaci funkcji celu. W zależności od przyjętej funkcji celu uzyskano różne, optymalne w myśl przyjętego kryterium, konfiguracje tłumików:

a) kryterium 1 (maksymalizacja bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań)

optymalnym jest umieszczenie 7 tłumików na 7 kondygnacji i 3 tłumików na 9 kondygnacji.

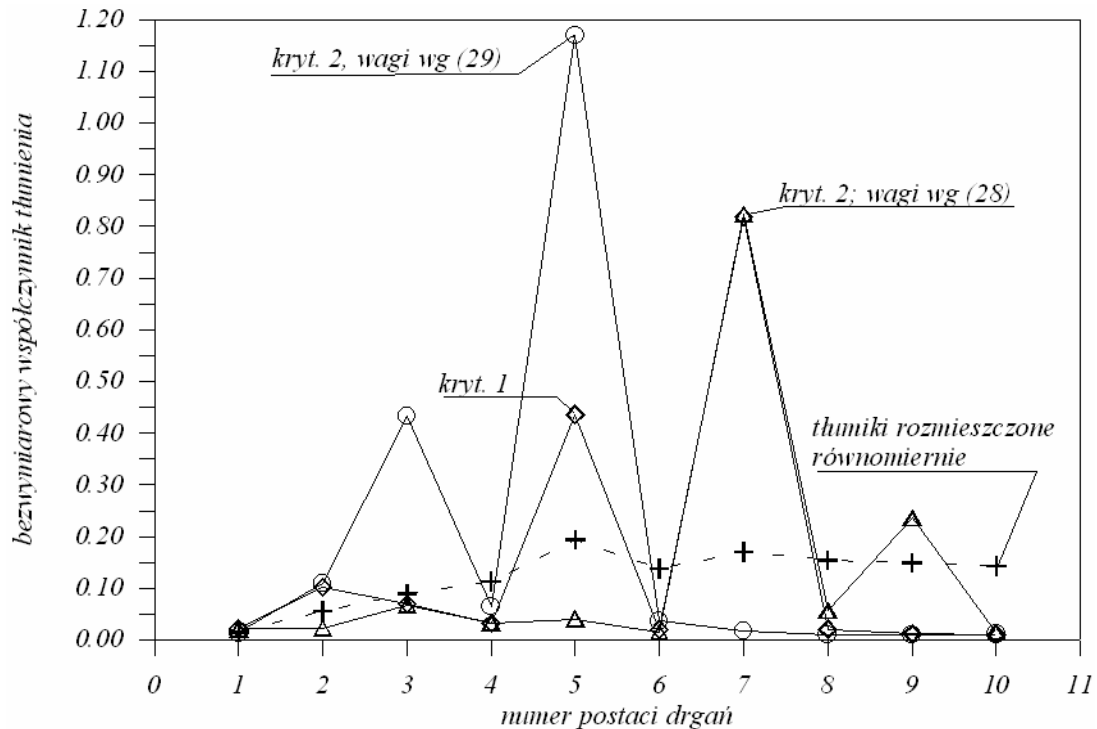
b) kryterium 2 z wagami funkcji celu obliczonymi za pomocą wzoru (28) (maksymalizuje się sumę wszystkich bezwymiarowych współczynników tłumienia z wagami tak dobranymi, aby odpowiadały udziałowi poszczególnych postaci drgań we wzorze na przemieszczenie stropu najwyższej kondygnacji)

optymalnym jest umieszczenie 3 tłumików na 5 kondygnacji i 7 tłumików na 7 kondygnacji.

c) kryterium 2 z wagami funkcji celu obliczonymi za pomocą wzoru (29) (maksymalizuje się sumę wszystkich bezwymiarowych współczynników tłumienia z wagami tak dobranymi, aby odpowiadały udziałowi poszczególnych postaci drgań w wyrażeniu na siłę poprzeczną w słupie najniższej kondygnacji)

optymalne jest umieszczenie 6 tłumików na 9 kondygnacji i 4 tłumików na 10 kondygnacji.

Bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy z optymalnie rozmieszczonymi tłumikami drgań pokazano na rys. 10.



Rys. 10. Bezwymiarowe współczynniki tłumienia ram z optymalnie rozmieszczonymi tłumikami drgań – różne kryteria optymalizacji

Rezultaty otrzymane przy użyciu kryterium 1 (maksymalizacja bezwymiarowego współczynnika tłumienia 1 postaci drgań) zaznaczono za pomocą linii ciągłej z rombami. Wyniki otrzymane przy użyciu kryterium 2 pokazano za pomocą linii ciągłych z trójkątami lub kółkami odnoszącymi się odpowiednio do przypadku wag obliczanych za pomocą wzoru (28) i (29). Dla porównania linią przerywaną z krzyżykami pokazano bezwymiarowe współczynniki tłumienia ramy z równomiernie rozmieszczonymi tłumikami drgań.

Widać znaczne zróżnicowanie bezwymiarowych współczynników tłumienia w zależności od przyjętego kryterium optymalizacji.

Podane powyżej wyniki dotyczą przypadku wymuszeń kinematycznych, z którymi mamy do czynienia w przypadku sił wymuszających wywołanych np. trzęsieniami ziemi lub wpływami parasejsmicznymi.

## Literatura

- [1] R. Lewandowski, *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2006,
- [2] A. K. Chopra, *Dynamics of structures. Theory and applications to earthquake engineering*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2000,
- [3] T. Trombetti, S. Silestri, On the modal damping ratios of shear-type structure equipped with Rayleigh damping systems, *Journal of Sound and Vibration*, **292**, pp.21-58, 2006,
- [4] Zhang R. H., Soong T. T., Seismic design of viscoelastic dampers for structural applications, *J. Structural Engineering, Proceedings of ASCE*, **118**, (1992) 1375 – 1392.