

Roman LEWANDOWSKI *)
Tomasz SZYMKOWIAK **)

WPLYW UKŁADU POMIAROWEGO NA EFEKTY AKTYWNEJ REGULACJI DRGAŃ KONSTRUKCJI RAMOWYCH

1. Wstęp

Stalą tendencją jest dążenie do budowy konstrukcji lekkich, o większej rozpiętości, optymalnie zaprojektowanych i wykonywanych z materiałów o wyższej wytrzymałości. Równocześnie konstrukcje te są bardziej wrażliwe na działanie obciążeń dynamicznych. Drgania wywołane tymi obciążeniami mogą w sposób istotny zmniejszać komfort użytkowania lub, w skrajnych przypadkach, zagrażać bezpiecznej eksploatacji tych obiektów. Konieczne staje się więc doskonalenie metod redukcji drgań konstrukcji budowlanych. Jednym ze sposobów redukcji drgań jest zastosowanie układów automatycznej regulacji.

Ogólnie rzecz ujmując, układ aktywnej regulacji składa się z pewnej liczby czujników mierzących odpowiedź dynamiczną w wybranych punktach konstrukcji, komputera wyznaczającego potrzebne siły aktywnego sterowania oraz siłowników wywołujących wspomniane siły regulacji. Opis różnych układów aktywnej regulacji umożliwiających redukcję drgań budynków można znaleźć w pracy [1].

Analizę dynamicznego zachowania konstrukcji z zainstalowanym układem aktywnej regulacji przeprowadza się zakładając zazwyczaj, że mierzony jest stan dynamiczny całej konstrukcji gdy tymczasem, ze względów technicznych poprzestaje się na pomiarze stanu dynamicznego kilku wybranych punktów. Może to w istotny sposób zmienić działanie rzeczywistego układu regulacji w porównaniu z zachowaniem wynikającym z analizy modelu obliczeniowego.

Niniejsza praca jest poświęcona analizie wpływu rozmieszczenia czujników drgań, ich ilości i rodzaju na efekty redukcji drgań konstrukcji ramowych poddanych działaniu wiatru. Wykazano, że rozmieszczenie czujników drgań ma zasadniczy wpływ na efekty regulacji drgań. W porównaniu do przypadku w którym mierzy się stan dynamiczny całej konstrukcji można uzyskać zarówno zwiększenie jak i zmniejszenie efektów regulacji. Niestety przez nieodpowiedni wybór punktów pomiaru można również spowodować, że układ aktywnej regulacji stanie się niestabilny.

(*) Dr hab. inż. - Politechnika Poznańska

(**) Mgr inż. - Studio projektowe ADS

2. Równania ruchu konstrukcji ramowej

Równanie ruchu rozpatrywanej konstrukcji ramowej daje się zapisać w postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t) + \mathbf{p}(t) , \quad (1)$$

gdzie symbolami $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ oraz $\mathbf{p}(t)$ oznaczono odpowiednio wektory przemieszczeń, sił aktywnej regulacji i obciążeń węzłowych. Wymiar wektorów $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ jest równy n , a wektor sił aktywnej regulacji ma wymiar r . Ponadto symbole \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} oraz \mathbf{B}_1 oznaczają odpowiednio macierz mas, macierz tłumienia, macierz sztywności oraz prostokątną macierz o wymiarze (nr) określającą punkty przyłożenia sił aktywnej regulacji. Modelem obliczeniowym ramy jest tzw. rama ścinana opisana między innymi w monografii [2]. Rygły tej ramy są nieskończenie sztywne, a masa konstrukcji jest skoncentrowana na poziomic rygli. Przemieszczenia poziome rygli są jedynymi stopniami dynamicznej swobody ramy.

Obciążeniem ramy są siły wywołane dynamiczną częścią parcia wiatru. Zakłada się, że obciążenie to ma charakter losowego procesu ergodycznego względem czasu. Obciążenie nie jest skorelowane przestrzennie. Siłę wymuszającą działającą na poziomie stropu i -tej kondygnacji, która jest równocześnie i -tym elementem wektora $\mathbf{p}(t)$, oblicza się ze wzoru:

$$p_i(t) = \rho C_z A_i \bar{V}_i w_i(t) , \quad (2)$$

gdzie symbole ρ , C_z , \bar{V}_i , $w_i(t)$ oraz A_i oznaczają odpowiednio gęstość powietrza, współczynnik opływu, średnią prędkość wiatru i jego losowe fluktuacje na poziomie i -tego stropu oraz pole ekspozycji stowarzyszone z i -tą kondygnacją. Funkcje opisujące losowe fluktuacje prędkości wiatru wyznacza się w sposób opisany w pracy [3] na podstawie funkcji gęstości widmowej zaproponowanej przez Davenporta. Ostatecznie przykładowe fluktuacje prędkości wiatru dają się opisać za pomocą wzoru o postaci:

$$w_k(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_{jk} \cos(\omega_j t + \theta_j) , \quad (3)$$

gdzie współczynniki α_{jk} są określone w sposób podany w pracy [3], a θ_j to losowe kąty fazowe o rozkładzie równomiernym z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$. Ponadto $\omega_j = (j-1)\delta\omega$, $\delta\omega = \omega_{\max} / N$ gdzie ω_{\max} jest tzw. częstością obciążenia funkcji gęstości widmowej, a N liczbą harmonicznym uwzględnionych w rozwinięciu (3).

Analizę układów automatycznej regulacji często przeprowadza się używając równań ruchu zapisanych za pomocą zmiennych stanu. W rozpatrywanym przypadku równania te mają postać:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{p}(t) , \quad (4)$$

gdzie $\mathbf{x}(t) = \text{col}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, a ponadto

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} . \quad (5)$$

3. Metoda automatycznej regulacji drgań

Zgodnie z teorią liniowej regulacji kwadratowej (LQR) wskaźnik jakości sterowania przyjęto w postaci:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt, \quad (6)$$

gdzie symbolami \mathbf{Q} i \mathbf{R} oznaczono macierze wagowe. Macierz \mathbf{Q} jest symetryczna i pół-dodatnio określona, a macierz \mathbf{R} jest symetryczna i dodatnio określona.

Oznaczmy ponadto symbolem $\mathbf{y}(t)$ c -wymiarowy wektor zawierający te współrzędne wektora stanu $\mathbf{x}(t)$ które mierzy się za pomocą czujników. Można teraz napisać dodatkowe równanie o postaci:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \quad (7)$$

gdzie \mathbf{C} jest zerojedynkową macierzą transformacji o wymiarze $(c \times 2n)$.

Zakładamy dalej, że siły aktywnej regulacji są określane na podstawie tylko tych współrzędnych wektora stanu które są znane z pomiaru. Można więc napisać:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G} \mathbf{y}(t) = \mathbf{G} \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \quad (8)$$

gdzie \mathbf{G} jest chwilowo nieznaną macierzą sprzężenia zwrotnego.

Omawiany problem jest traktowany jako zadanie optymalizacji w którym należy wyznaczyć macierz \mathbf{G} w taki sposób aby wskaźnik jakości sterowania (6) osiągnął wartość minimalną oraz aby równocześnie były spełnione ograniczenia wyrażone równaniami (4), (7) i (8). Zadanie to rozwiązano za pomocą metody opisanej w pracy [4]. Po jej zastosowaniu otrzymuje się do rozwiązania układ trzech macierzowych równań o postaci:

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{C}^T)^{-1}, \quad (9)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{C}) + (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{C})^T \mathbf{P} + 2\mathbf{Q} + 2\mathbf{C}^T \mathbf{G}^T \mathbf{R} \mathbf{G} \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (10)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{C})^T + (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{C}) \mathbf{L} + \mathbf{I} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

W równaniach (9) – (11) niewiadomymi są macierze \mathbf{G} , \mathbf{P} oraz \mathbf{L} .

Można pokazać, że jeżeli znany jest cały wektor stanu to układ równań (9) - (11) jest równoważny równaniu Riccati'ego. Wtedy $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, a równanie (9) przyjmuje postać (12)

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}, \quad (12)$$

z której to postaci wynika, że rozwiązanie równania (11) staje się nieistotne ponieważ macierz \mathbf{G} nie zależy teraz od \mathbf{L} . Podstawiając z kolei (12) do (10) otrzymuje się następujące równanie Riccati'ego:

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + 2\mathbf{Q} - \frac{1}{2} \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Należy również zaznaczyć, że postępując w opisany powyżej sposób, w istocie rzeczy, otrzymuje się rozwiązanie suboptymalne ponieważ w trakcie wyprowadzania równań (9) – (11) pomija się wpływ wymuszenia zewnętrznego na warunki optymalności. Taki sposób postępowania jest często stosowany przy projektowaniu regulatorów drgań (patrz prace [1] lub [5]).

Układ równań (9) – (11) rozwiązuje się za pomocą pewnej procedury iteracyjnej która zostanie krótko opisana poniżej. Oznaczmy indeksem i numer iteracji, a symbolami \mathbf{G}_i , \mathbf{P}_i oraz \mathbf{L}_i i -te przybliżenia macierzy \mathbf{G} , \mathbf{P} i \mathbf{L} . Na początku procesu iteracyjnego należy przyjąć \mathbf{G}_0 (początkowe przybliżenie macierzy \mathbf{G}) w ten sposób aby były spełnione warunki stabilności ruchu konstrukcji z zainstalowanym układem regulacji. Warunki te będą

spełnione jeżeli części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{BGC}$ będą ujemne. Znając macierz \mathbf{G}_i można rozwiązać równanie (10) względem \mathbf{P} , a równanie (11) względem \mathbf{L} otrzymując w ten sposób ich nowe przybliżenia \mathbf{P}_{i+1} i \mathbf{L}_{i+1} . Po podstawieniu macierzy \mathbf{G}_i w miejsce macierzy \mathbf{G} równania (10) i (11) stają się liniowymi równaniami Lapunowa. Równania te rozwiązuje się za pomocą metody Bartelsa - Stewarta opisanej w pracy [6]. Nowe przybliżenie macierzy \mathbf{G} oblicza się z równania:

$$\mathbf{G}_{i+1} = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{C}^T)^{-1} . \quad (14)$$

Jeżeli dwa kolejne przybliżenia macierzy \mathbf{G} , \mathbf{P} i \mathbf{L} niewiele różnią się od siebie to proces iteracyjny kończy się, a ostatnio otrzymane przybliżenie macierzy \mathbf{G} traktuje się jako poszukiwane rozwiązanie problemu. Przyjęto następujące warunki zakończenia iteracji:

$$\|\mathbf{G}_{i+1} - \mathbf{G}_i\| \leq \varepsilon_1 , \quad \|\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i\| \leq \varepsilon_2 , \quad \|\mathbf{L}_{i+1} - \mathbf{L}_i\| \leq \varepsilon_3 , \quad (15)$$

gdzie symbolami $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ oznaczono założone dokładności obliczeń.

4. Rozwiązanie równania ruchu

Podstawiając zależność (8) do równania (4) możemy napisać:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}\mathbf{p}(t) , \quad (16)$$

Rozwiązanie równania ruchu (16) można przedstawić w następujący sposób [5]:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(t_0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{H}\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (17)$$

gdzie $\Phi(t)$ jest macierzą fundamentalną obliczaną w następujący sposób [5]:

$$\Phi(t) = \exp(\tilde{\mathbf{A}}t) = \mathbf{I} + t\tilde{\mathbf{A}} + \frac{1}{2!}t^2\tilde{\mathbf{A}}^2 + \frac{1}{3!}t^3\tilde{\mathbf{A}}^3 + \dots . \quad (18)$$

Całkę występującą we wzorze (17) oblicza się numerycznie. Zakłada się, że w małym przedziale czasu $h = t_{k+1} - t_k$ siły wymuszające mają wartość stałą równą wartości w chwili t_k . Można teraz łatwo obliczyć wspomnianą całkę i przedstawić stan układu w chwili t_{k+1} w sposób następujący:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi\mathbf{x}_k + \Gamma\mathbf{H}\mathbf{p}_k , \quad (19)$$

gdzie

$$\Gamma = h\mathbf{I} + \frac{1}{2!}h^2\tilde{\mathbf{A}} + \frac{1}{3!}h^3\tilde{\mathbf{A}}^2 + \frac{1}{4!}h^4\tilde{\mathbf{A}}^3 + \dots . \quad (20)$$

W powyższych wzorach wielkości z indeksem k są określone w chwili t_k .

Znając warunki początkowe ruchu oraz siły wymuszające można wyznaczyć stan układu w kolejnych chwilach czasu korzystając z równania rekurencyjnego (19).

5. Wyniki przykładowych obliczeń

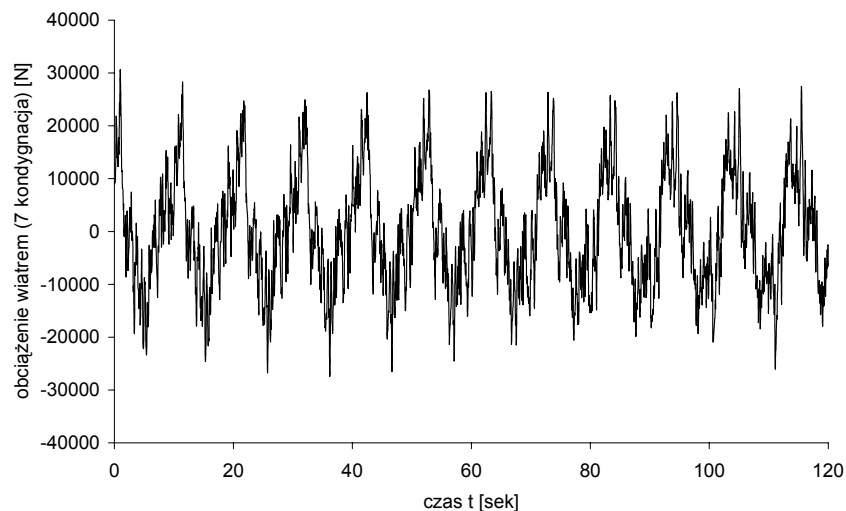
Wykonano przykładowe obliczenia dla ramy jednoprzęsłowej budynku ośmiokondygnacyjnego. Przyjęto następujące podstawowe dane do obliczeń: wysokość kondygnacji

$h = 3,0$ m, masa stropu $M = 34560,0$ kg, sztywność słupa na zginanie $EJ = 191475,0$ kNm², rozpiętość rygla ramy $l=9,0$ m, rozstaw ram $d=12,0$ m. Bezwymiarowy współczynnik tłumienia 1 i 2 postaci drgań wynosi 2% tłumienia krytycznego. Macierz tłumienia konstrukcji ma postać:

$$\mathbf{D} = \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{K} . \quad (21)$$

Założono, że na 1, 4, 6 i 8 kondygnacji są zainstalowane aktywne, ciągnowe tłumiki drgań. Przyjęto ponadto, że macierze \mathbf{Q} i \mathbf{R} są diagonalne, a elementy diagonalne tych macierzy są równe $q_{ii} = 1300$ oraz $r_{ii} = 0,00000001$.

Przyjęto następujące wartości parametrów funkcji gęstości widmowej Davenporta: $\bar{V} = 27,0$ m/s, $C_z = 10,0$, $\rho = 1,23$ kg/m³. Pole ekspozycji stowarzyszone z typową kondygnacją jest równe $A = 36,0$ m². Przykładowy przebieg siły dynamicznej (na poziomie rygla 7 kondygnacji) wywołanej fluktuacjami prędkości średnich wiatru pokazano na Rys. 1.

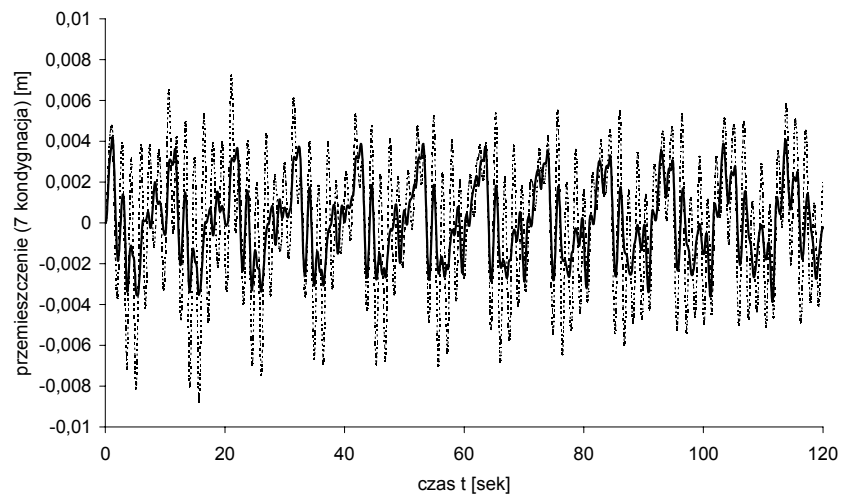


Rys. 1 Obciążenie wiatrem na poziomie stropu 7 kondygnacji

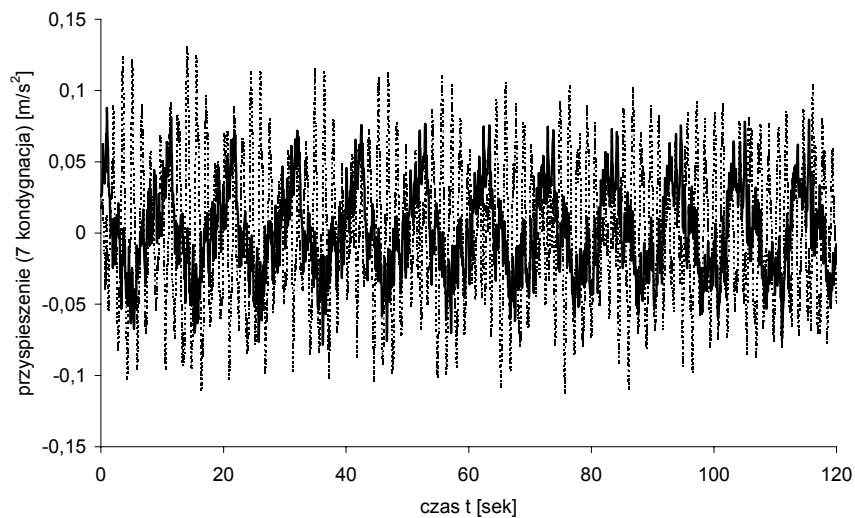
Wykonano obliczenia dynamiczne ramy dla różnych sposobów rozmieszczenia czujników na konstrukcji. Założono, że można instalować czujniki mierzące przemieszczenia poziome i prędkości stropów. Na Rys.2 pokazano porównanie przemieszczeń poziomych stropu 7 kondygnacji. Linia przerywaną pokazano przemieszczenia konstrukcji bez układu aktywnej regulacji, a linią ciągłą przemieszczenia ramy na której zainstalowano układ regulacji. Czujniki tego układu regulacji mierzą prędkości poziome wszystkich stropów. Na Rys.3 dokonano porównania przyspieszeń stropu 7 kondygnacji ramy bez układu regulacji z przyspieszeniami ramy na której zainstalowano układ regulacji. Widać, że zaproponowany układ regulacji umożliwia znaczną redukcję drgań ramy. Istotna jest znaczna redukcja przyspieszeń ponieważ w ten sposób zwiększa się komfort użytkownika budynku. Na Rys.4 pokazano przebieg siły regulacji wywoływanej przez siłownik umieszczony na 1 kondygnacji.

W Tabelcy 1 zestawiono najistotniejsze informacje umożliwiające porównanie efektywności kilku układów regulacji różniących się od siebie rozmieszczeniem czujników. W kolumnach 2 i 3 podano liczbę czujników oraz numery rygli ramy na których te czujniki są zamontowane. Zauważmy, że przypadek 5 opisuje ramę dla której mierzymy cały wektor stanu (tzn. przemieszczenia poziome i prędkości wszystkich rygli ramy), a przypadek 7 dotyczy ramy bez układu regulacji. W kolejnych kolumnach omawianej tabelcy zestawiono maksymalne wartości przemieszczeń, prędkości, przyspieszeń oraz sił aktywnej regulacji. Analiza danych zawartych w tabelcy upoważnia do sformułowania następujących wniosków:

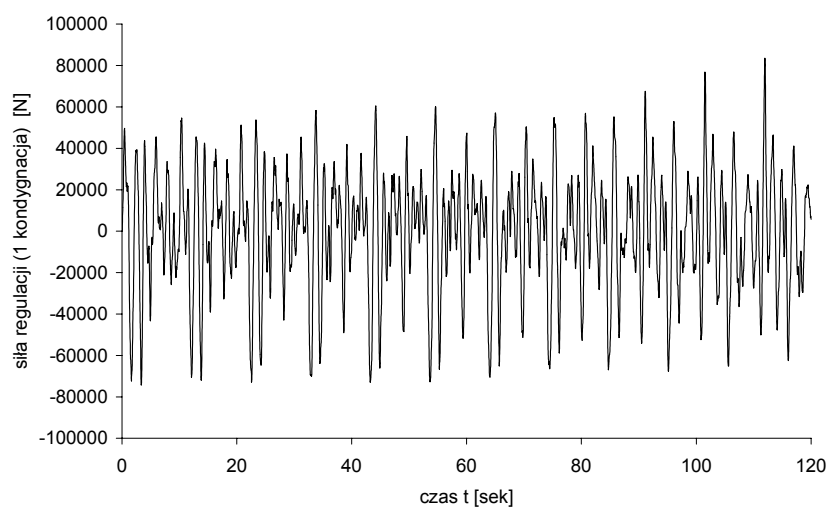
- rozmieszczenie czujników na konstrukcji ma istotny wpływ na efekty regulacji,



Rys.2 Porównanie przemieszczeń stropu 7 kondygnacji. Linia przerywana – wyniki dla ramy bez układu regulacji, linia ciągła - wyniki dla ramy z zainstalowanym układem regulacji



Rys. 3 Porównanie przyspieszeń stropu 7 kondygnacji. Linia przerywana – wyniki dla ramy bez układu regulacji, linia ciągła - wyniki dla ramy z zainstalowanym układem regulacji



Rys. 4 Siła regulacji wywoływana przez siłownik umieszczony na 1 kondygnacji.

Tablica 1 Porównanie układów regulacji różniących się rozmieszczeniem czujników

Lp	Liczba czujników przemieszczeń (nr kondygnacji)	Liczba czujników prędkości (nr kondygnacji)	Amplituda przem. [m]	Amplituda prędkości [m/s]	Amplituda przysp. [m/s ²]	Amplituda siły regul. [N]
1	0	8(1,2,3,4,5,6,7,8)	0,00422	0,01182	0,08761	83484,0
2	4(1,4,6,8)	4(1,4,6,8)	0,00596	0,01898	0,08726	6190,7
3	2(1,8)	2(1,8)	0,00615	0,02272	0,08719	5941,8
4	0	2(1,8)	0,00615	0,02290	0,08720	4651,5
5	8(1,2,3,4,5,6,7,8)	8(1,2,3,4,5,6,7,8)	0,00638	0,01724	0,08723	22304,0
6	0	4(1,4,6,8)	0,00707	0,01893	0,08727	4846,6
7	0	0	0,00875	0,02746	0,13026	0,0
8	8(1,2,3,4,5,6,7,8)	0	układ niestabilny			
9	4(1,4,6,8)	0	układ niestabilny			
10	4(2,3,5,7)	4(2,3,5,7)	układ niestabilny			
11	0	1(8)	układ niestabilny			

- nie jest konieczny pomiar całego wektora stanu po to by uzyskać istotną redukcję drgań,
- niektóre konfiguracje czujników są szczególnie korzystne, umożliwiają większą redukcję drgań za pomocą mniejszych sił regulacji w porównaniu z układem regulacji który mierzy cały wektor stanu,
- istnieją również konfiguracje czujników destabilizujące działanie układu regulacji,

- problem optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych wymaga dalszych szczegółowych badań,
- informacje podane w Tablicy 1 sugerują, że racjonalnymi konfiguracjami czujników dla rozpatrywanej ramy są konfiguracje oznaczone numerami 2, 3 i 4.

5. Zakończenie

W niniejszej pracy omówiono pewną metodę aktywnej regulacji drgań konstrukcji ramowych umożliwiającą analizę wpływu liczby, rodzaju i rozmieszczenia czujników pomiarowych na efekty aktywnej regulacji drgań. W szczególności badano możliwości redukcji drgań budynków poddanych działaniu sił wywołanych działaniem silnych wiatrów. Wykazano, że efekty aktywnej regulacji w znacznym stopniu zależą od konfiguracji układu mierzącego stan dynamiczny konstrukcji. Problem ten ma istotne znaczenie, a pełne jego rozwiązanie wymaga przeprowadzenia dalszych badań.

Literatura

- [1] SOONG T.: *Active structural control*, Longman Scientific & Technical, New York, 1990
- [2] PAZ M.: *Structural dynamics: theory and computation*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1985
- [3] LEWANDOWSKI R.: Application of semi-empirical model to analysis of vortex-excited vibrations of beams near synchronisation region, in *Computational Civil and Structural Engineering* (eds. G.De Roeck and B.H.V. Topping), Civil-Comp Press, Edinburgh, 2000, s.133-141,
- [4] LEVINE W. S., ATHANS M.: On the determinations of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-15, No1, 1970, s. 44-48
- [5] MEIROVITCH L.: *Dynamics and control of structures*, John Wiley, New York, 1990
- [6] BARTELS R., STEWART G.: Solution of the matrix equation $AX+XB=C$; Algorithm 432, *Communications of ACM*, Vol.15, 1972, s.820-826

INFLUENCE OF MEASUREMENTS SYSTEM ON EFFECTS OF ACTIVE VIBRATION CONTROL OF FRAME STRUCTURES

Summary

In this paper, the influence of sensor placements on effects of active control of vibration of planar frameworks is investigated. In particular, the reduction of vibration caused by wind loads is of interest. The wind loads are numerically simulated on a basis of well-known Davenport power spectral density. The linear quadratic regulator theory and the method proposed by Levine and Athanes [4] are used to design the control system with the reduced-order state system observer. Results of example calculations for the eighth story framework with and without control system are presented and discussed. Different sensor placements are taken into account and it is found that a strong relation between effectiveness of control system and the sensor configuration exists.

Praca została wykonana w ramach programu badań naukowych finansowanych przez Komitet Badań Naukowych (BW-11-168/02).