

Roman LEWANDOWSKI \*)

## **ANALIZA PARAMETRYCZNA DRGAŃ BELEK WYWOŁANYCH WZBUDZENIEM WIROWYM**

### **1. Wstęp**

Efektom działania wiatru na budowle są różnego rodzaju drgania. Niektóre rodzaje tych drgań mogą stanowić zagrożenie dla bezpieczeństwa konstrukcji. Dotyczy to również lekkich konstrukcji takich jak np. maszty lub kominy stalowe poddanych działaniu wymuszenia wirowego. Siły wzbudzenia wirowego pojawiają się w trakcie opływu powietrza wokół ciała (konstrukcji). Są one wynikiem oddziaływania wirów, powstających w strumieniu aerodynamicznym, na drgającą konstrukcję. Jeżeli częstość odrywania się wirów jest w przybliżeniu równa częstości drgań własnych konstrukcji to amplitudy drgań konstrukcji mogą być bardzo duże.

W niniejszej pracy omawia się wyniki analiz numerycznych dotyczących zachowania się belek o przekroju kołowym poddanych działaniu wymuszenia wirowego. W szczególności analizuje się drgania w tzw. obszarze synchronizacji. W obszarze tym częstość sił wymuszających wywołanych wymuszeniem wirowym jest w przybliżeniu równa wybranej częstości drgań własnych belki. Oprócz wspomnianych analiz parametrycznych praca zawiera również krótki opis podstaw teoretycznych zastosowanej metody obliczeń. Bardziej szczegółowy opis teorii drgań w obszarze synchronizacji można znaleźć w pracach [1, 2].

### **2. Półempiryczny model Hartlena - Currie**

Problem wzajemnej interakcji ciała i opływającego to ciało powietrza jest bardzo złożony. W ogólnym przypadku do opisu ruchu powietrza należy zastosować, trudne do rozwiązania, równania Naviera-Stokesa. W analizie dynamicznej konstrukcji najistotniejszym problemem jest określenie amplitud przemieszczeń drgającej konstrukcji oraz stowarzyszonych z nimi zmian naprężeń. Szczegółowy opis ruchu powietrza wydaje się być mniej istotny i może się ograniczać do opisu sił wzbudzenia wirowego. Powyższe spostrzeżenia pozwalają na przyjęcie przybliżonego modelu teoretycznego w którym ruch konstrukcji jest opisywany klasycznymi równaniami ruchu, a do opisu wzbudzenia wirowego stosuje się półempiryczne

---

(\*) Dr hab. inż. - Politechnika Poznańska

modele aerodynamiczne. Opis wybranych modeli tego typu można znaleźć w pracach [3, 4]. W niniejszej pracy zastosowano model Hartlena - Currie.

W pracy [4] rozważa się ruch sprężyste podpartego, sztywnego cylindra o przekroju kołowym opływającego powietrzem. Zachowanie układu cylinder - powietrze jest opisywane układem dwóch równań o postaci:

$$\ddot{w} + 2\xi\dot{w} + w = a\omega_s^2 c_L, \quad \ddot{c}_L - \alpha\omega_s \dot{c}_L + \gamma c_L^3 / \omega_s + \omega_s^2 c_L = b\dot{w}, \quad (1)$$

gdzie symbole  $w$ ,  $c_L$ ,  $\xi$ ,  $\omega_s$  oznaczają odpowiednio przemieszczenie cylindra w kierunku poprzecznym do ruchu powietrza, tzw. „ukryty” parametr aerodynamiczny interpretowany jako współczynnik opływu (the lift coefficient), współczynnik tłumienia cylindra oraz częstość wymuszenia wirowego. Ponadto symbole  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $a$ ,  $b$  oznaczają stałe aerodynamiczne określone eksperymentalnie. Częstość wymuszenia wirowego jest dana wzorem:

$$\omega_s = 2\pi S U / D, \quad (2)$$

a symbole  $D$ ,  $S$ ,  $U$  oznaczają odpowiednio średnicę cylindra, liczbę Strouhala oraz średnią prędkość powietrza. Zauważmy, że równanie (1.2) jest nieliniowym równaniem różniczkowym typu van der Pola. Model ten został rozszerzony w pracach [1, 2] na przypadek konstrukcji belkowych traktowanych jako układy o wielu stopniach dynamicznej swobody.

### 3. Równania ruchu

Do analizy drgań belki stosuje się metodę elementów skończonych. Wykorzystuje się dwuwęzłowy, belkowy element skończony, którego przemieszczenia prostopadłe do kierunku wiatru opisuje się za pomocą wielomianów Hermite’a. Przestrzeń otaczającą belkę dzieli się na warstwy równoległe do kierunku niezaburzonego przepływu powietrza i prostopadłe do osi belki. Grubość warstwy jest równa długości elementu skończonego. Zakłada się, że przepływy w sąsiednich warstwach są wzajemnie niezależne. Oznacza to również, że siły wzbudzenia aerodynamicznego w warstwie są wywoływane przepływem tylko w tej warstwie. Do opisu współczynnika opływu w warstwie używa się liniowej funkcji kształtu lub zakłada się, że współczynnik ten jest stały w warstwie. Wobec tego funkcja przemieszczeń elementu belkowego  $w(x,t)$  oraz funkcja współczynnika opływu  $c_L(x,t)$  mogą być aproksymowane w następujący sposób:

$$w(x,t) = \mathbf{N}_b^T(x) \mathbf{w}_e(t), \quad c_L(x,t) = \mathbf{N}_L^T(x) \mathbf{c}_e(t), \quad (3)$$

gdzie symbolami  $\mathbf{N}_b(x)$ ,  $\mathbf{N}_L(x)$  oraz  $\mathbf{w}_e(t)$ ,  $\mathbf{c}_e(t)$  oznaczono odpowiednio wektory funkcji kształtu oraz wektory parametrów węzłowych elementu skończonego i warstwy.

Równanie ruchu belki można wyprowadzić w tradycyjny sposób korzystając np. z zasady Hamiltona. Ponadto, równanie (1.2) opisujące zachowanie parametru aerodynamicznego  $c_L(x,t)$  można rozumieć jako równanie fikcyjnego oscylatora mechanicznego z nieliniową charakterystyką tłumienia. Dla tego fikcyjnego oscylatora można napisać wyrażenie na „energię kinetyczną”, „energię potencjalną” oraz „pracę wirtualną” sił niekonserwatywnych. Wielkości te należy jednak rozumieć jako pewnego rodzaju funkcjonały, które umożliwiają wyprowadzenie odpowiedników równania (1.2) w przypadku układu o wielu stopniach swobody. Szczegółowe wyprowadzenie wspomnianych powyżej wielkości można znaleźć w pracy [1].

Po zastosowaniu zasady Hamiltona otrzymuje się równanie opisujące zachowanie parametru aerodynamicznego warstwy oraz równanie ruchu elementu skończonego. Równania te mają postać:

$$\mathbf{R}_b^e = \mathbf{M}_b^e \ddot{\mathbf{w}}_e(t) + \mathbf{D}_b^e \dot{\mathbf{w}}_e(t) + \mathbf{K}_b^e \mathbf{w}_e(t) - \omega_s^2 \mathbf{S}_L^e \mathbf{c}_e(t) , \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_L^e = \mathbf{M}_L^e \ddot{\mathbf{c}}_e(t) - \omega_s \mathbf{D}_L^e \dot{\mathbf{c}}_e(t) + \omega_s^{-1} \mathbf{D}_{NL}^e(\dot{\mathbf{c}}_e(t), \dot{\mathbf{c}}_e(t)) \dot{\mathbf{c}}_e(t) + \omega_s^2 \mathbf{K}_L^e \mathbf{c}_e(t) - \mathbf{S}_b^e \dot{\mathbf{w}}_e(t) . \quad (5)$$

Poniżej podano definicje macierzy występujących w równaniach (4) i (5)

$$\mathbf{M}_b^e = \int_0^l m(x) \mathbf{N}_b(x) \mathbf{N}_b^T(x) dx , \quad \mathbf{K}_b^e = \int_0^l EJ(x) \mathbf{N}_b''(x) \mathbf{N}_b''^T(x) dx , \quad (6)$$

$$\mathbf{M}_L^e = \frac{1}{l} \int_0^l \mathbf{N}_L(x) \mathbf{N}_L^T(x) dx , \quad \mathbf{K}_L^e = \frac{p_e^2}{ld_e^2} \int_0^l \mathbf{N}_L(x) \mathbf{N}_L^T(x) dx , \quad (7)$$

$$\mathbf{S}_L^e = \frac{D^3 p_e^2 d_e}{8\pi^2 S^2} \int_0^l \mathbf{N}_b(x) \mathbf{N}_L^T(x) dx , \quad \mathbf{S}_b^e = \frac{b_e}{l} \int_0^l \mathbf{N}_L(x) \mathbf{N}_b^T(x) dx , \quad (8)$$

$$\mathbf{D}_b^e = \kappa_1 \mathbf{M}_b^e + \kappa_2 \mathbf{K}_b^e , \quad \mathbf{D}_L^e = \frac{\alpha_e p_e}{ld_e} \int_0^l \mathbf{N}_L(x) \mathbf{N}_L^T(x) dx , \quad (9)$$

$$\mathbf{D}_{NL}^e(\dot{\mathbf{c}}_e, \dot{\mathbf{c}}_e) = \frac{\gamma_e d_e}{lp_e} \int_0^l \mathbf{N}_L^T(x) \dot{\mathbf{c}}_e(t) \dot{\mathbf{c}}_e^T(t) \mathbf{N}_L(x) \mathbf{N}_L(x) \mathbf{N}_L^T(x) dx . \quad (10)$$

Łatwo można zauważyć, że elementy macierzy  $\mathbf{D}_{NL}^e(\dot{\mathbf{c}}_e, \dot{\mathbf{c}}_e)$  są kwadratowymi funkcjami pierwszych pochodnych parametru aerodynamicznego.

Równania opisujące zachowanie rozpatrywanego układu jako całości mają postać:

$$\mathbf{R}_b(t) = \mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{D}_b \dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}_b \mathbf{w}(t) - \omega_s^2 \mathbf{S}_L \mathbf{c}(t) = \mathbf{0} , \quad (11)$$

$$\mathbf{R}_L(t) = \mathbf{M}_L \ddot{\mathbf{c}}(t) - \omega_s \mathbf{D}_L \dot{\mathbf{c}}(t) + \omega_s^{-1} \mathbf{D}_{NL}(\dot{\mathbf{c}}(t), \dot{\mathbf{c}}(t)) \dot{\mathbf{c}}(t) + \omega_s^2 \mathbf{K}_L \mathbf{c}(t) - \mathbf{S}_b \dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{0} , \quad (12)$$

a macierze  $\mathbf{M}_b$ ,  $\mathbf{M}_L$ ,  $\mathbf{D}_b$ ,  $\mathbf{D}_L$ ,  $\mathbf{D}_{NL}(\dot{\mathbf{c}}(t), \dot{\mathbf{c}}(t))$ ,  $\mathbf{K}_b$ ,  $\mathbf{K}_L$ ,  $\mathbf{S}_b$ ,  $\mathbf{S}_L$ ,  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{c}(t)$  są macierzami globalnymi zbudowanymi w zwykły sposób na podstawie odpowiadających im macierzy zdefiniowanych dla elementu skończonego i warstwy powietrza. Wektory reszt  $\mathbf{R}_b(t)$  i  $\mathbf{R}_L(t)$  są równe zeru w stanie równowagi dynamicznej. Równanie (12) jest nieliniowym równaniem różniczkowym typu van der Pola. Rozwiązaniami ustalonymi tego typu równań są najczęściej rozwiązania okresowe zwane cyklami granicznymi [5].

#### 4. Rozwiązanie dla drgań ustalonych

Wyniki eksperymentów przeprowadzanych w tunelu aerodynamicznym wskazują, że cylinder opływany powietrzem o stałej prędkości wykonuje w stanie ustalonym drgania harmoniczne w których zasadniczy udział ma jedna harmoniczna. W niniejszej pracy założono wobec tego, że w pierwszym przybliżeniu drgania w stanie ustalonym można opisać funkcją o postaci:

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_c \cos \omega t + \mathbf{w}_s \sin \omega t , \quad \mathbf{w}_e(t) = \mathbf{w}_{ce} \cos \omega t + \mathbf{w}_{se} \sin \omega t , \quad (13)$$

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_c \cos \omega t + \mathbf{c}_s \sin \omega t , \quad \mathbf{c}_e(t) = \mathbf{c}_{ce} \cos \omega t + \mathbf{c}_{se} \sin \omega t . \quad (14)$$

We wzorach (13) i (14) symbolami  $\mathbf{w}_c, \mathbf{w}_s, \mathbf{c}_c, \mathbf{c}_s, \mathbf{w}_{ce}, \mathbf{w}_{se}, \mathbf{c}_{ce}, \mathbf{c}_{se}$  oznaczono nieznane wektory amplitud parametrów węzłowych belki i współczynników aerodynamicznych odpowiednio na poziomie układu oraz elementu skończonego lub warstwy aerodynamicznej. Również częstość drgań ustalonych  $\omega$  jest nieznana. Rozwiązanie dane wzorami (13) i (14) są rozwiązaniami przybliżonymi i nie spełniają równań (11) i (12). Wymaga się jednak by spełniały je w sensie całkowym. Z tego powodu nieznane wektory amplitud  $\mathbf{w}_c, \mathbf{w}_s, \mathbf{c}_c, \mathbf{c}_s$  wyznacza się z układu równań algebraicznych otrzymywanych metodą Galerkiną. W omawianym przypadku warunki Galerkiną mają postać:

$$\frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{R}_b(t) \cos \omega t dt = \mathbf{0}, \quad \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{R}_b(t) \sin \omega t dt = \mathbf{0}, \quad (15)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{R}_L(t) \cos \omega t dt = \mathbf{0}, \quad \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{R}_L(t) \sin \omega t dt = \mathbf{0}, \quad (16)$$

gdzie symbol  $T = 2\pi / \omega$  oznacza nieznany okres drgań ustalonych. Wektory reszt  $\mathbf{R}_b(t), \mathbf{R}_L(t)$  występujące w (15) i (16) wyznacza się podstawiając założoną postać rozwiązania do równań (11) i (12).

Z warunków Galerkiną otrzymuje się następujące nieliniowe równania amplitud [1]:

$$(\mathbf{K}_b - \omega^2 \mathbf{M}_b) \mathbf{w}_c + \omega \mathbf{D}_b \mathbf{w}_s - \omega_s^2 \mathbf{S}_L \mathbf{c}_c = \mathbf{0}, \quad (17)$$

$$-\omega \mathbf{D}_b \mathbf{w}_c + (\mathbf{K}_b - \omega^2 \mathbf{M}_b) \mathbf{w}_s - \omega_s^2 \mathbf{S}_L \mathbf{c}_s = \mathbf{0}, \quad (18)$$

$$(\omega_s^2 \mathbf{K}_L - \omega^2 \mathbf{M}_L) \mathbf{c}_c - \omega \omega_s \mathbf{D}_L \mathbf{c}_s + \frac{3}{4} \omega^3 \omega_s^{-1} [\mathbf{D}_{NL}(\mathbf{c}_c, \mathbf{c}_c) + \mathbf{D}_{NL}(\mathbf{c}_s, \mathbf{c}_s)] \mathbf{c}_s - \omega \mathbf{S}_b \mathbf{w}_s = \mathbf{0}, \quad (19)$$

$$\omega \omega_s \mathbf{D}_L \mathbf{c}_c - \frac{3}{4} \omega^3 \omega_s^{-1} [\mathbf{D}_{NL}(\mathbf{c}_c, \mathbf{c}_c) + \mathbf{D}_{NL}(\mathbf{c}_s, \mathbf{c}_s)] \mathbf{c}_c + (\omega_s^2 \mathbf{K}_L - \omega^2 \mathbf{M}_L) \mathbf{c}_s + \omega \mathbf{S}_b \mathbf{w}_c = \mathbf{0}. \quad (20)$$

W układzie równań (17) - (20) mamy o jedna niewiadomą więcej niż liczba równań ponieważ częstość drgań  $\omega$  jest również nieznana. Do wspomnianych równań należy dołączyć jeszcze jedno równanie. Dodatkowy warunek wynika z faktu, że równania problemu są równaniami autonomicznymi. Można więc dowolnej chwili przyporządkować początek osi czasu. W niniejszej pracy, początek osi czasu przyporządkowuje się tej chwili dla której wybrany element wektora  $\mathbf{w}_c$  (np. o numerze  $i$ ) jest równy zero i w związku z czym dodatkowe równanie przyjmuje postać:

$$w_{ci} = 0. \quad (21)$$

Równania (17) - (21) zostały zapisane dla zadanej prędkości średniej wiatru  $U$ . Często jednak pożądane jest wyznaczenie odpowiedzi dynamicznej układu w pewnym zakresie tych prędkości. Aby to osiągnąć, w niniejszej pracy zastosowano metodę kontynuacji [6]. Szczegółowy opis metody kontynuacji użytej do rozwiązania rozważanego tutaj problemu został podany w pracy [2]. Tutaj wspomniana metoda zostanie tylko skrótowo omówiona.

W metodzie kontynuacji traktuje się układ równań (17) - (21) jako układ równań z parametrem. Tutaj parametrem jest średnia prędkość wiatru  $U$ . Zakłada się, że znane jest rozwiązanie dla pewnej prędkości wiatru  ${}^m U, {}^m \mathbf{w}_c, {}^m \mathbf{w}_s, {}^m \mathbf{c}_c, {}^m \mathbf{c}_s$ . Rozwiązanie początkowe można łatwo uzyskać stosując metodę Newtona i wybierając  ${}^0 U$  poza obszarem syn-

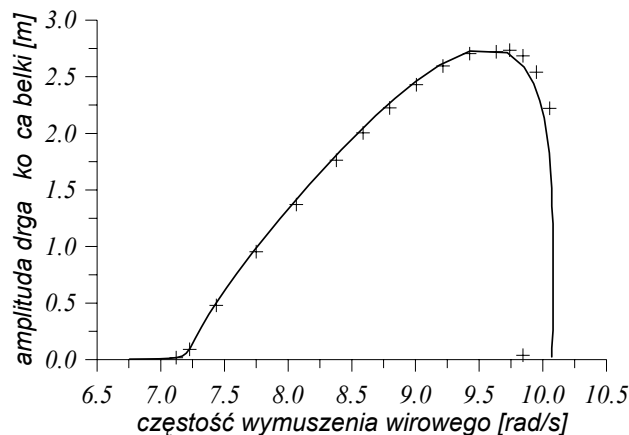
chronizacji. W metodzie kontynuacji żąda się aby następne rozwiązanie (o numerze  $m+1$ ) spełniało równania (17) - (21) oraz tzw. równanie więzów. W niniejszej pracy równaniu więzów nadano postać:

$$(\Delta \mathbf{w}_c^T \Delta \mathbf{w}_c + \Delta \mathbf{w}_s^T \Delta \mathbf{w}_s) / \mu_b^2 + (\Delta \mathbf{c}_c^T \Delta \mathbf{c}_c + \Delta \mathbf{c}_s^T \Delta \mathbf{c}_s) / \mu_L^2 = (\Delta s)^2, \quad (22)$$

gdzie symbol  $\Delta$  oznacza przyrost wielkości którą poprzedza, a symbole  $\mu_b$ ,  $\mu_L$ ,  $s$  oznaczają odpowiednio współczynniki skalowania oraz parametr łuku. Parametr łuku określa odległość punktów  $m$  i  $m+1$  w przestrzeni rozwiązań zadania. Układ równań (17) - (22) rozwiązuje się w sposób opisany w pracy [2] uzyskując w rezultacie rozwiązanie o numerze  $m+1$ . Powyższy proces obliczeń powtarza się wielokrotnie otrzymując rozwiązania dla różnych prędkości średnich wiatru i w rezultacie krzywą odpowiedzi dynamicznej układu.

## 5. Wyniki analiz numerycznych

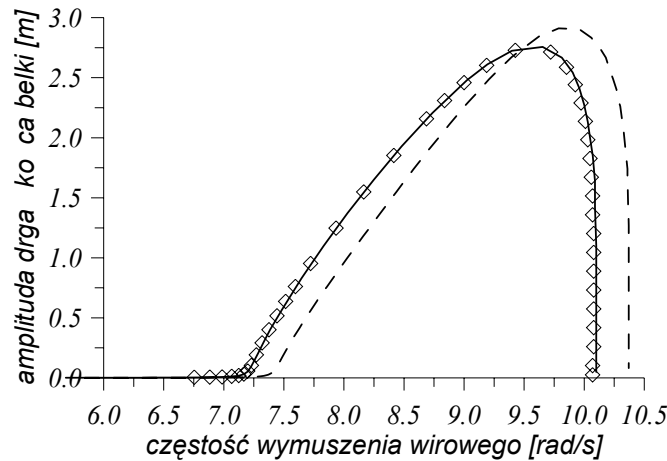
Zaproponowane w pracy analityczno - numeryczne rozwiązanie dla drgań ustalonych ma charakter przybliżony i wobec tego należy zweryfikować jego dokładność. Z tego powodu równania (11) i (12) zostały, dla różnych prędkości średnich wiatru, rozwiązane za pomocą metody Newmarka. Dla zadanej prędkości średniej  ${}^m U$  przyjmowano warunki początkowe ruchu i całkowano równania (11) i (12) aż do uzyskania stanu ustalonego. Następnie wykonywano obliczenia dla prędkości nieco większej  ${}^{m+1} U = {}^m U + \Delta U$  przyjmując jako nowe warunki początkowe rozwiązanie ustalone uzyskane dla prędkości wiatru  ${}^m U$ . W ten sposób znacznie zmniejsza się czas pracy komputera niezbędny do wyznaczenia stanu ustalonego za pomocą metody Newmarka. Ze względu na małe tłumienie w układzie proces numerycznego dochodzenia do rozwiązania ustalonego może być długotrwały. Ponadto, należy bardzo starannie sprawdzić czy otrzymane rozwiązanie jest rzeczywiście rozwiązaniem ustalonym. Porównanie wyników obliczeń uzyskanych za pomocą obu metod pokazano na rys.1. Linią ciągłą zaznaczono rozwiązanie otrzymane za pomocą półanalitycznej metody opisanej w tej pracy, a krzyżykami rozwiązania ustalone otrzymane metodą Newmarka. Widać bardzo dobrą zgodność wyników.



Rys.1 Porównanie wyników obliczeń

Wyniki pokazane na rys.1 dotyczą belki wspornikowej o długości  $L=32$  m i sztywności na zginanie  $EJ = 2,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2$ . Przekrój poprzeczny belki ma średnicę  $D=1,2$  m. Pierwsza i

druga częstość drgań własnych belki są odpowiednio równe  $\omega_1 = 7,2387 \text{ rad/s}$   $\omega_2 = 45,3656 \text{ rad/s}$ . Macierz tłumienia belki wyznaczono w ten sposób, że tłumienie pierwszej i drugiej postaci drgań belki jest równe 0,1% tłumienia krytycznego. Do obliczeń przyjęto bardzo mały współczynnik tłumienia aby zilustrować możliwości proponowanej metody obliczeń. Pozostałe dane przyjęte do obliczeń są równe:  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $S=0,20$ ,  $\alpha = 0,2$ ,  $b=0,4$ ,  $\gamma = 2/3$ . Belkę podzielono na 10 elementów skończonych. Przyjęto, że wiatr o stałej prędkości średniej  $U$  działa na długości pierwszych 8 elementów licząc od wolnego końca belki.



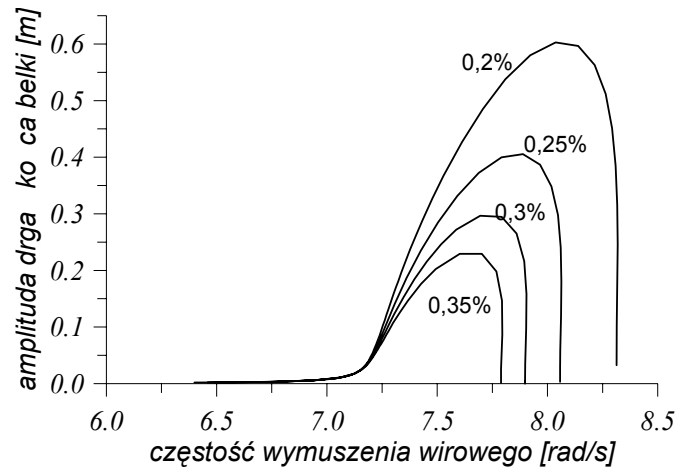
Rys.2 Zależność wyników od liczby elementów skończonych

Wyniki przedstawione na rys.2 ilustrują zależność rezultatów obliczeń od liczby elementów skończonych. Linia przerywaną pokazano rezultaty obliczeń otrzymane po podzieleniu belki na 3 elementy, linią ciągłą wyniki obliczeń przy podziale belki na 5 elementów, a kwadratami oznaczono wyniki obliczeń dla belki podzielonej na 10 elementów. Widać, że należy podzielić belkę na nie mniej niż 5 elementów aby rezultaty obliczeń nie zależały od dyskretyzacji układu.

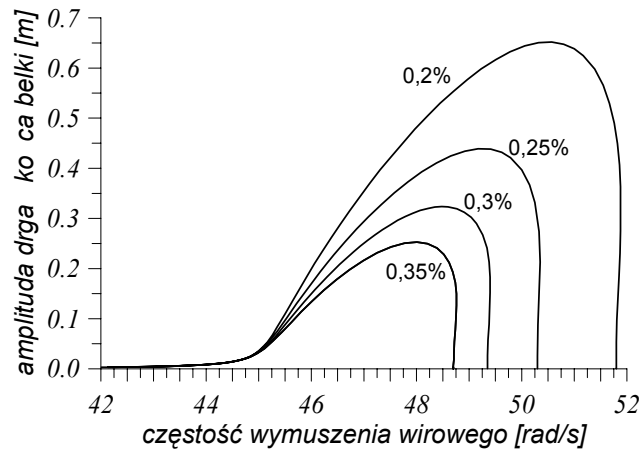
Wyniki kolejnej analizy parametrycznej przedstawiono na rys.3. Pokazano na nim krzywe odpowiedzi dynamicznej belki dla różnych współczynników tłumienia. Przedstawione rezultaty dotyczą obszaru synchronizacji drgań w pobliżu 1 częstości drgań własnych belki. Widać bardzo duży wpływ tłumienia zarówno na amplitudę drgań belki jak i zasięg strefy synchronizacji. Z kolei na rys.4 przedstawiono rezultaty podobnej analizy wykonanej dla obszaru synchronizacji położonego w pobliżu 2 częstości drgań własnych. Z porównania tych wykresów wynika, że dla tych samych współczynników tłumienia modalnego amplitudy drgań w 2 obszarze synchronizacji (w pobliżu 2 częstości drgań własnych belki) są większe od odpowiednich amplitud drgań wziętych z 1 obszaru synchronizacji. Ponadto widoczne jest, że drugi obszar synchronizacji jest znacznie szerszy niż pierwszy obszar synchronizacji.

Na rys.5 porównano wyniki obliczeń dla belek o różnej sztywności na zginanie. Wykonano obliczenia dla 2 wartości współczynnika tłumienia (0,2% i 0,3% tłumienia modalnego) oraz  $EJ = 2,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2$  (krzywe nr 1 i 2) i  $EJ = 3,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2$  (krzywe nr 3 i 4).

Wszystkie przytoczone w pracy rezultaty obliczeń wskazują na stopniowy wzrost amplitudy drgań na początku obszaru synchronizacji (dla mniejszych wartości średnich prędkości wiatru) i gwałtowne zmniejszanie się amplitud drgań na końcu obszaru synchronizacji.



Rys.3 Wpływ tłumienia na amplitudę drgań belki i zakres synchronizacji drgań (częstość wymuszenia wirowego bliska 1 częstości drgań własnych belki)

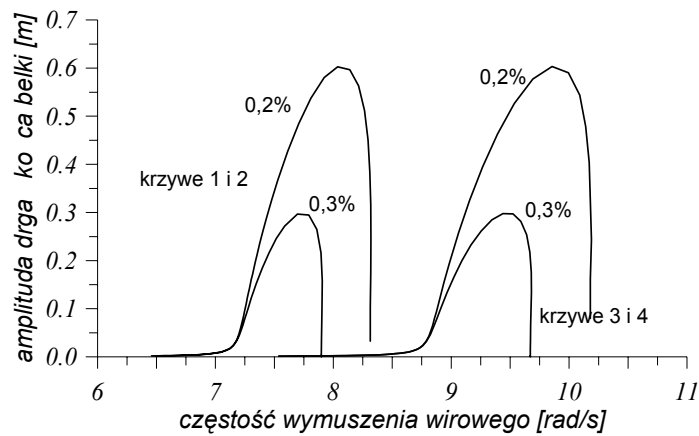


Rys.4 Wpływ tłumienia na amplitudę drgań belki i zakres synchronizacji drgań (częstość wymuszenia wirowego bliska 2 częstości drgań własnych belki)

## 5. Zakończenie

W niniejszej pracy przedstawiono analizę dynamicznego zachowania belek poddanych działaniu wymuszenia wirowego wywołanego opływem powietrza. W szczególności analizowano tzw. obszar synchronizacji drgań. Do opisu zachowania układu belka - otaczające powietrze niezbędne jest uwzględnienie efektów nieliniowych. Zaproponowana metoda analizy okazała się skuteczna oraz odpowiednio dokładna. Nadaje się również do przeprowadzania analiz parametrycznych. Przedstawione, w niniejszej pracy, wyniki analiz nume-

rycznych mogą być użytecznymi wskazówkami ilustrującymi zachowanie rozpatrywanego układu dynamicznego. Praktyczne wykorzystanie zaproponowanej metody wymaga doświadczalnego określenia stałych występujących w modelu Hartlena - Currie dla belek o innych przekrojach poprzecznych.



Rys.5 Porównanie odpowiedzi dynamicznej dla belek o różnej sztywności

### Literatura

- [1] LEWANDOWSKI R.: The computational model for non-linear vortex-induced vibration of beams, *Proceedings of the XIII Poliskiejh Conference on Computer Methods in Mechanics*, Poznan, Poland, 5-8 May, 1997, Vol.2, s.733-742.
- [2] LEWANDOWSKI R.: An application of the Hartlen-Currie model and the finite element method to transient and steady state analysis of vortex-induced vibration of beams, *Proceedings of the Second East European Conference on Wind Engineering*, Prague, 7-11 September, Czech Republic, 1998, Vol.1, s.121-126.
- [3] GOSWAMI I., SCANLAN R.H., JONES N.P.: Vortex-induced vibration of circular cylinders. I. Experimental data, II. New model, *Journal of Engineering Mechanics*, 1993, Vol.191, s.2240-2302.
- [4] HARTLEN R.T., Currie I.G.: Lift oscillator of vortex-induced vibration, *Proceedings of ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, 1970, Vol.5, s.577-591.
- [5] OSIŃSKI Z.: *Teoria drgań*, PWN, Warszawa, 1978.
- [6] SEYDEL R.: *From equilibrium to chaos: practical bifurcation and stability analysis*. New York: Elsevier, New York, 1988.

## PARAMETRIC ANALYSIS OF VIBRATIONS OF BEAMS SUBJECTED TO VORTEX EXCITATION

### Summary

In this paper, the results of parametric analysis of vibrations of beams excited by vortex shedding are presented. The finite element method and the strip method is adopted to discretize the beam and surrounding air. The Hartlen - Currie semiempirical model is used to describe main aerodynamics effects cause by wind passing across a bluff body and forming

an aerodynamic wake. The harmonic balance method is used to determine the steady state dynamic behaviour of considered system.

Praca została wykonana w ramach programu badań naukowych Nr 7 TO7E 027 12 finansowanych przez Komitet Badań Naukowych .