

### 3. KRATOWNICA JAKO BEZPOŚREDNIA ILUSTRACJA METODY

Chcąc w najprostszy sposób zilustrować ideę podziału struktury na elementy (dyskretyzacji) oraz technikę budowania macierzy sztywności całego układu, posłużymy się prostym przykładem kratownicy płaskiej. Dla tego przykładu w naturalny sposób narzuca się podział, czyli dyskretyzacja, która zakłada, że każdy pręt kratownicy jest jednocześnie elementem. Pełną informację o stanie odkształceń, naprężeń i przemieszczeń pręta (elementu) uzyskamy, gdy będziemy znali przemieszczenia jego końców. Zakładamy oczywiście klasycznie, że węzły są idealnymi przegubami, a siły są tak przyłożone w węzłach, że wszystkie elementy przenoszą wyłącznie siły osiowe oraz że materiał prętów jest liniowo-sprężysty. Ograniczamy się do geometrycznie liniowej teorii.

#### 3.1. Sztywność elementy w globalnym układzie współrzędnych

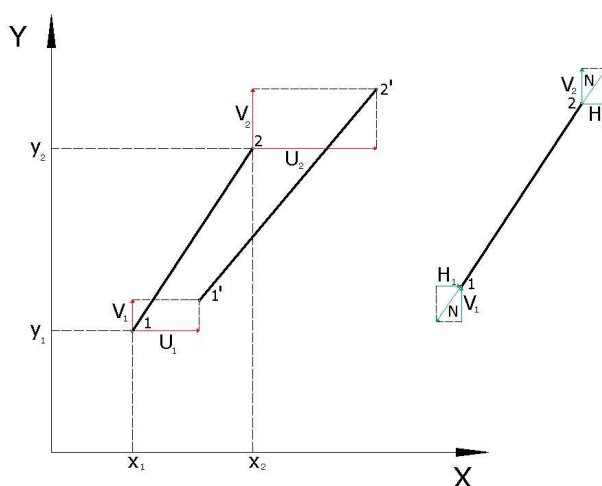
Rozważmy pręt (1-2), którego położenie w układzie współrzędnych  $x_0y$ , wspólnym dla całej rozważanej struktury (w tzw. układzie globalnym), jest przedstawione na rysunku 3.1.

Założmy, że stałe na długości elementu pole powierzchni przekroju pręta oznaczono przez  $A$ , zaś moduł Younga materiału - przez  $E$ . Długość elementu wyznaczamy z prostej zależności geometrycznej jako funkcję współrzędnych węzłów:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.1)$$

Potrzebne relacje definiujące nachylenie elementu mają postać:

$$\cos \alpha = c = \frac{x_2 - x_1}{L}, \quad \sin \alpha = s = \frac{y_2 - y_1}{L}. \quad (3.2)$$



Rys. 3.1. Element kratownicy płaskiej. Definicja stopni swobody i sił wewnętrznych

Przemieszczenia węzłów elementu zgrupujemy w jednym wektorze czteroskładnikowym:

$$d = [u_1, v_1, u_2, v_2]^T \quad (3.3)$$

o takim elemencie mówimy, że ma cztery stopnie swobody.

W wyniku obciążenia i deformacji całego układu rozważany pręt zajmie położenie . Pomijając efekty drugorzędne, wydłużenie elementu zapiszemy w postaci zależności

$$\Delta L = (u_2 - u_1)c + (v_2 - v_1)s \quad (3.4)$$

Odształcenie podłużne pręta zdefiniujemy klasycznie jako

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (3.5)$$

i wyrazimy za pomocą wektora przemieszczeń węzłów w następujący sposób:

$$\varepsilon = B \cdot d, \text{ gdzie } B = \frac{1}{L} \cdot [-c \quad -s \quad c \quad s] \quad (3.6)$$

Macierz  $B$  nazywana bywa macierzą zgodności geometrycznej. Wprost z prawa Hooke'a wynika, że siła osiowa  $N$  w elemencie wynosi:

$$N = E \cdot A \cdot \varepsilon = E \cdot A \cdot B \cdot d = C \cdot d, \quad (3.7)$$

gdzie macierz  $C = E \cdot A \cdot B$  nazywana jest niekiedy macierzą sił węzłowych.

Zapiszmy teraz siły węzłowe, wyrażone w składowych odniesionych do układu globalnego, działające w węzłach 1 i 2 . Niech wektor tych sił będzie oznaczony przez  $P$  :

$$P = [H_1 \quad V_1 \quad H_2 \quad V_2]. \quad (3.8)$$

Odpowiednie siły węzłowe wyrażone są za pomocą następujących zależności:

$$H_1 = -N \cdot c, \quad V_1 = -N \cdot s, \quad H_2 = N \cdot c, \quad V_2 = N \cdot s. \quad (3.9)$$

W końcu więc otrzymujemy

$$P = B^T \cdot L \cdot N = B^T \cdot L \cdot E \cdot A \cdot B \cdot d = K_e \cdot d = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & c \cdot s & -c^2 & -c \cdot s \\ c \cdot s & s^2 & -c \cdot s & -s^2 \\ -c^2 & -c \cdot s & c^2 & c \cdot s \\ -c \cdot s & -s^2 & c \cdot s & s^2 \end{bmatrix} \cdot d \quad (3.10)$$

Dla tego prostego elementu od razu udało się nam wyrazić składowe operatora  $K_e$  (macierzy sztywności elementu) w globalnym układzie współrzędnych. Dla wielu innych elementów taka praktyka byłaby nieskuteczna. Okaże się potem, że znacznie praktyczniejsze jest wyznaczenie odpowiednich operatorów  $K_e$  w układach odniesionych do tzw. współrzędnych lokalnych.

Ponieważ składowe wszystkich macierzy sztywności  $K_e$  muszą być wyrażone w odniesieniu do jednego wspólnego układu współrzędnych, trzeba będzie reprezentacje tych operatorów przetransformować z układu lokalnego do globalnego. W rozdziale 3.5 zajmiemy się problemem transformacji składowych wektorów z układu lokalnego do globalnego, a tym samym wyprowadzimy odpowiednie formuły transformacyjne dla macierzy sztywności.

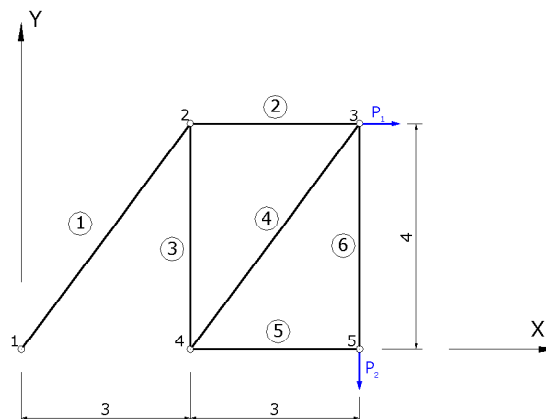
Przyjrzyjmy się przez chwilę macierzy sztywności elementu  $K_e$ . Łatwo zauważyć, że macierz ta jest symetryczna i osobiwa. Można się też przekonać, że zadeklarowanie przemieszczeń węzłów  $d$ , odpowiadających sztywnej translacji elementu bądź sztywnego obrotu, nie wywołuje żadnych sił węzłowych.

Znając macierze sztywności  $K_e$  wszystkich elementów, będziemy mogli zbudować macierz sztywności całego układu, która jest operatorem wiążącym wektor przemieszczeń wszystkich węzłów układu z wektorem obciążeń węzłowych układu.

### 3.2. Scalenie czyli agregacja macierzy sztywności układu

Proces budowania macierzy sztywności układu z macierzy sztywności elementów wyrażonych w tym samym układzie współrzędnych (układzie globalnym) nazywamy agregacją. Agregacja zapewnia równość przemieszczeń węzłów, które jednocześnie należą do różnych elementów. Jest też spełnieniem równań nierozdzielności odkształceń w węzłach układu.

Prześledźmy proces agregowania macierzy sztywności układu na przykładzie



Rys. 3.2. Kratownica płaska obciążona dwiema siłami

kratownicy przedstawionej na rysunku 3.2. Układ ten składa się z sześciu elementów, które łączą ze sobą pięć węzłów. Globalna liczba stopni swobody układu jest równa 10 (po dwie składowe przemieszczeń w każdym węźle). Tak więc globalna macierz sztywności układu ma wymiary  $10 \times 10$ . Agregacja macierzy sztywności układu  $K$  ( $10 \times 10$ ) polega na sumowaniu składowych macierzy sztywności elementów  $K_e$  ( $4 \times 4$ ) w odpowiednich miejscach macierzy  $K$ . Jeżeli założymy, że element  $e$  łączy węzły  $i$  oraz  $j$ , to składowe macierze  $K_e$  będą umieszczone w macierzy układu  $K$  w taki sposób, by zwiększyć sztywność odpowiednich wyrazów tej macierzy.

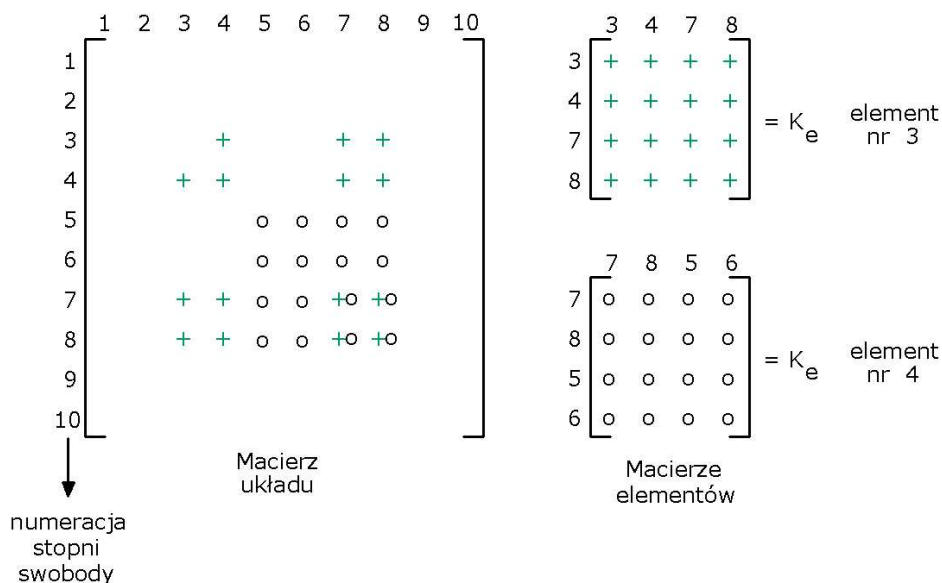
Na przykład składowe macierze trzeciego i czwartego elementu kratownicy (rys. 3.2) będą umieszczone w miejscach związanych z przemieszczeniami węzłów 2 i 4 dla elementu 3 oraz 4 i 3 dla elementu 4. Umieszczenie odpowiednich składowych tych elementów w macierzy sztywności ilustruje rysunek 3.3.

Miejsce dodawania składowych macierzy trzeciego elementu zaznaczono znakiem  $+$ , zaś czwartego - znakiem  $o$ .

Wektor obciążenia w tym prostym przypadku ( $10 \times 1$ ) jest wektorem sił zewnętrznych. W sytuacjach bardziej skomplikowanych, kiedy obciążenia węzłowe są wynikiem sił działających na poszczególne elementy, proces scalania wygląda bardzo podobnie i polega na sumowaniu efektów wziętych z elementów w odpowiednich miejscach wektora globalnego.

Zauważmy, że utworzona macierz sztywności układu jest macierzą symetryczną i osobiwą. Wynika to ze sposobu scalania tej macierzy i faktu, że wszystkie macierze elementów mają tę samą własność. Utworzony układ równań

$$K \cdot d = P \quad (3.11)$$



Rys. 3.3. Agregacja macierzy sztywności

gdzie  $K$  jest zbudowaną macierzą sztywności układu ( $10 \times 10$ ),  $d$  jest wektorem przemieszczeń węzłów ( $10 \times 1$ ) oraz  $P$  jest wektorem obciążeń węzłów ( $10 \times 1$ ), nie ma w tej postaci rozwiązania, gdyż nie są jeszcze zdefiniowane warunki brzegowe.

### 3.3. Modyfikacja układu równań przez wprowadzenie warunków brzegowych

Wprowadzenie w zadaniu warunków brzegowych polega na takiej modyfikacji układu równań (3.11), która spowoduje, że przy założonych obciążeniach  $P$  przemieszczenia punktów podporowych będą równe zero. Spośród kilku stosowanych sposobów modyfikacji tego układu zaproponujemy następujący. Polega on na umieszczeniu na głównej przekątnej macierzy  $K$ , w wierszu odpowiadającym zerowemu przemieszczeniu, liczby równej 1.0 oraz na wyzerowaniu reszty wyrazów tego wiersza i kolumny. Zeruje się także odpowiedni wiersz wektora  $P$ . W ten sposób w danym równaniu jest tylko jedna niewiadoma - przemieszczenie, które musi być równe zero. W omawianym przykładzie, który jest ilustracją dokonywanych kroków, zerowe musi być przemieszczenie węzłów 1 i 4 w obu kierunkach (stopnie swobody 1, 2 oraz 7, 8), a także przemieszczenie węzła 5 w kierunku poziomym (stopień swobody 9). Zbudowana w wyniku agregacji macierz sztywności musi być zmodyfikowana według następującego schematu (puste pola oznaczają wyrazy niezerowe):

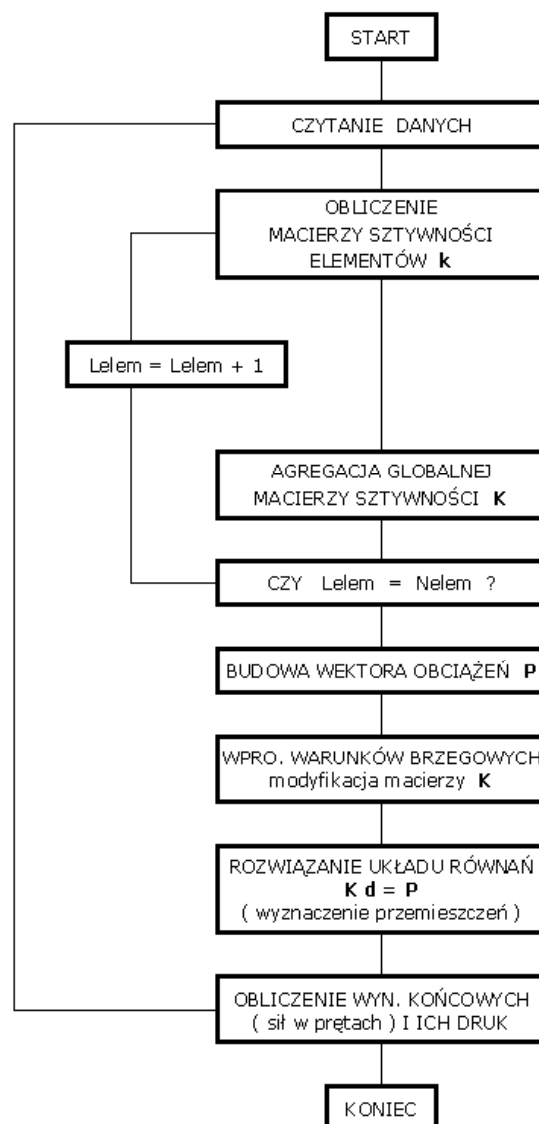
$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & 
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \\ \\ \\ \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

W powyższym układzie równań podano postać wektora obciążenia. Zaproponowany zabieg modyfikacji polega na utrzymaniu nie zmienionej liczby stopni swobody układu, przy czym w sposób naturalny otrzymamy zerowe przemieszczenia punktów, w których zdefiniowano podparcie. Macierz sztywności układu jest nieosobliwa i dodatnio określona, a wobec zadanych obciążeń  $P$  istnieje jednoznaczne rozwiązanie tego układu. W wyniku rozwiązania układu równań liniowych (3.12) otrzymamy pozostałe, nieznane dotąd przemieszczenia  $d_3$ ,  $d_4$ ,  $d_5$ ,  $d_6$ ,  $d_{10}$ . Nie będziemy się w tym miejscu zajmowali technikami numerycznymi rozwiązywania układów równań liniowych, które w niektórych

przypadkach (symetria, duże wymiary macierzy, itp.) są bardzo skomplikowane. Jedną z możliwych propozycji, jak rozwiązywać układ równań (3.12), zamieszczono w Dodatku A.

### 3.4. Odpowiedź układu i podsumowanie głównych kroków metody

O rozwiązaniu problemu możemy mówić, gdy znamy już wszystkie przemieszczenia węzłów. Wybierając z nich odpowiednie składowe globalnego wektora przemieszczeń na podstawie (3.7), określimy siły osiowe we wszystkich prętach, dalej reakcje podpór (z równowagi węzłów podporowych). By znaleźć reakcje podpór, czyli siły równoważące węzły w kierunku odebranego stopnia swobody, wystarczy przemnożyć dany wiersz macierzy  $K$  (przed modyfikacją) przez znany już wektor przemieszczeń  $d$  i uwzględnić obciążenie  $P$ . W celu zautomatyzowania wymienionych powyżej kroków należy w zbiorze danych zdefiniować macierze, w których będą zestawione informacje o geometrii wszystkich elementów, oraz macierze definiujące topologię struktury czyli zestawienie numerów węzłów należących do wszystkich elementów.



Rys. 3.4. Schemat blokowy obliczeń kratownicy

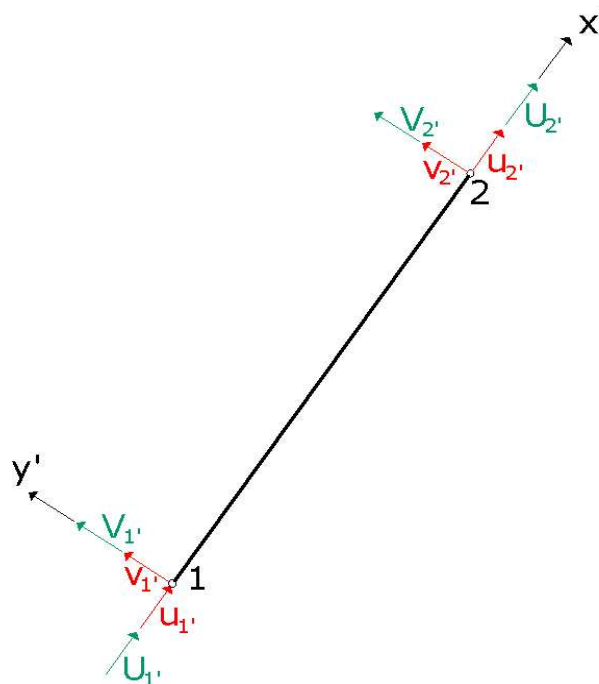
Podsumowania zasadniczych kroków metody dokonano na rysunku 3.4. Przedstawia on ogólny schemat blokowy programu realizującego obliczenia dowolnej kratownicy. Oprócz znanych i używanych już oznaczeń na schemacie występuje:  $Nelem$  - liczba elementów układu oraz  $Lelem$  - licznik tych elementów.

### 3.5. Układ współrzędnych lokalnych i globalnych oraz transformacja wektorów i macierzy

Spróbujmy jeszcze przedyskutować problem rozwiązywania zadania kratownicy, rozpoczynając od budowania wyrazów macierzy sztywności i wektorów przemieszczeń i obciążeń w układzie związanym z elementem. Przyczyna powtórnego analizowania tego samego problemu leży w tym, że dla większości elementów znacznie bardziej użyteczne jest odnoszenie się do układu współrzędnych lokalnych, a dopiero na koniec transformowanie odpowiednich wektorów i macierzy do wspólnego układu odniesienia (globalnego).

Rozpatrzmy element 1–2 w takim układzie osi  $x'y'$ , że oś  $x'$  pokrywa się z osią pręta, zaś  $y'$  jest prostopadłą do niej, a początek układu znajduje się w jednym z węzłów (rys.3.5).

Przez  $u_1, u_2$ , oznaczono przemieszczenia węzłów 1 i 2 wzdłuż osi pręta, zaś przez  $v_1, v_2$ , - prostopadłe do osi pręta. Odpowiednie siły węzłowe oznaczono dużymi literami  $U$  i  $V$ .



Rys. 3.5. Element kratownicy w lokalnym układzie współrzędnych

Zgodnie z prawem Hooke'a wydłużenie elementu wynosi:

$$\delta = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} \quad (3.13)$$

gdzie  $N$  jest siłą podłużną,  $L$  - długością pręta,  $E$  - modułem Younga. Tak więc siły działające w węzłach wzdłuż osi pręta wyrażają się w postaci:

$$U_{1'} = \frac{E \cdot A}{L}(u_{1'} - u_{2'}), \quad U_{2'} = \frac{E \cdot A}{L}(u_{2'} - u_{1'}). \quad (3.14)$$

Ponadto z równań równowagi wynika, że

$$U_{1'} = -U_{2'}, \quad \text{oraz} \quad V_{1'} = V_{2'} = 0 \quad (3.15)$$

Zapisując powyższe równania równowagi w postaci układu równań otrzymujemy :

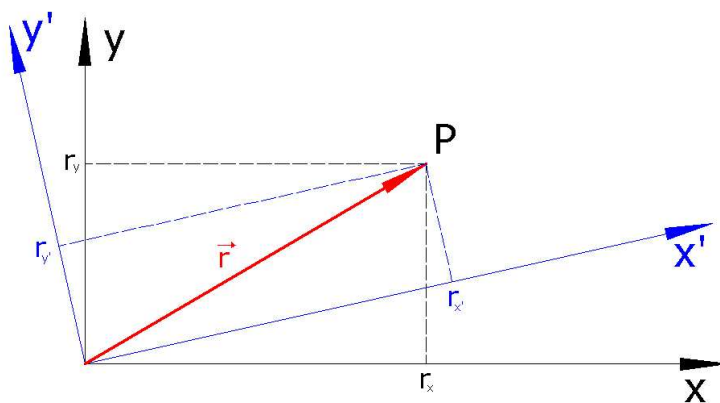
$$\frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1'} \\ v_{1'} \\ u_{2'} \\ v_{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1'} \\ V_{1'} \\ U_{2'} \\ V_{2'} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

gdzie oczywiście długość elementu  $L$  można wyrazić w znany sposób jako funkcję współrzędnych węzłów (3.1). Otrzymany wynik zapiszemy krócej w postaci równania macierzowego :

$$K_{e'} \cdot d_{e'} = p_{e'}, \quad (3.17)$$

w którym indeks  $e'$  odnosi wielkości do elementu, zaś  $'$  informuje o posługiwaniu się układem lokalnym  $x'0y'$ .

Przejdźmy do relacji między układem lokalnym i globalnym. Rozważmy dowolny wektor  $r$  (np. identyfikujący położenie punktu  $P$ ) w dwóch układach współrzędnych  $x0y$  (globalnym) i  $x'0y'$  (lokalnym) jak to ma miejsce na rysunku 3.6.



Rys. 3.6. Układ współrzędnych: lokalny  $x'0y'$  i globalny  $x0y$ .

Jeżeli przez  $i$  i  $j$  oznaczymy wersory osi układu  $xOy$  zaś przez  $i'$  i  $j'$  wersory osi układu  $x'Oy'$ , to wektor  $r$  może być w tych układach wyrażony w postaci następującej reprezentacji:

$$r = r_x i + r_y j \quad \text{w układzie } xOy$$

oraz

$$r = r_{x'} i' + r_{y'} j' \quad \text{w układzie } x'Oy'$$

(3.18)

Z równości lewych stron wynika, że

$$r_x i + r_y j = r_{x'} i' + r_{y'} j' \quad (3.19)$$

Mnożąc skalarnie obie strony tej równości przez wektor  $i$ , otrzymujemy:

$$r_x = r_{x'} i' i + r_{y'} j' i, \quad (3.20)$$

gdź  $ii = 1$ , zaś  $ij = 0$  ze względu na ortogonalność osi. Jeżeli oznaczymy, że

$$\begin{aligned} ii' &= \cos(x, x') = n_{11}, \\ ij' &= \cos(x, y') = n_{12}, \end{aligned}$$

wówczas mnożąc obie strony (3.19) także skalarnie przez  $j$ , możemy napisać:

$$\begin{aligned} r_x &= r_{x'} n_{11} + r_{y'} n_{12}, \\ r_y &= r_{x'} n_{21} + r_{y'} n_{22} \end{aligned} \quad (3.21)$$

lub macierzowo

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{x'} \\ r_{y'} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

albo krócej  $r = T \cdot r'$  oraz, co łatwo udowodnić,

$$r' = T^T r, \quad \text{gdzie } T^T = T^{-1}, \quad (3.23)$$

gdzie  $T$  jest macierzą transformacji.

Wracając do zadania z kratownicą, zanim dokonamy procesu agregacji globalnej macierzy sztywności konstrukcji, musimy wielkości  $K$  oraz  $p$  i  $d$  przetransformować do układu globalnego. Jeżeli przyjmujemy, że

$$r' \rightarrow [u_{1'} \quad v_{1'}]^T$$

oraz

$$(3.24)$$

$$r \rightarrow [u_1 \quad v_1]^T,$$

to dla dwóch węzłów elementu kratownicy możemy zapisać :

$$\begin{bmatrix} u_{1'} \\ v_{1'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} u_{2'} \\ v_{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

$$(3.25)$$

czyli przemieszczenia dla elementu  $e$  można wyrazić jako

$$d_e = \begin{bmatrix} u_{1'} \\ v_{1'} \\ u_{2'} \\ v_{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^T & 0 \\ 0 & T^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$(3.26)$$

lub krócej

$$d_{e'} = R \cdot d_e$$

$$(3.27)$$

gdzie  $d_e$  jest wektorem przemieszczeń węzłów, wyrażonym w układzie globalnym.

Zupełnie podobnie możemy zapisać zależność dla wektora obciążeń (3.17):

$$p_{e'} = R \cdot p_e, \text{ gdzie } p_e = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2]^T.$$

$$(3.28)$$

W końcu zupełnie formalnie przekształcimy wzór (3.17):

$$K_{e'} \cdot R \cdot d_e = R \cdot p_e,$$

$$R^T \cdot K_{e'} \cdot R \cdot d_e = p_e,$$

$$(3.29)$$

ale

$$R^T \cdot R = R^{-1} \cdot R = I, \text{ oraz } R^T = R^{-1}$$

i skąd otrzymujemy równanie dla elementu, którego składowe są wyrażone w układzie globalnym :

$$K_e \cdot d_e = p_e \quad , \quad K_e = R^T \cdot K_e' \cdot R \quad (3.30)$$

Bez trudu można sprawdzić, że dokonując transformacji macierzy  $K_e'$  (3.16) według zależności (3.30), otrzymamy znaną już nam postać macierzy (3.10).

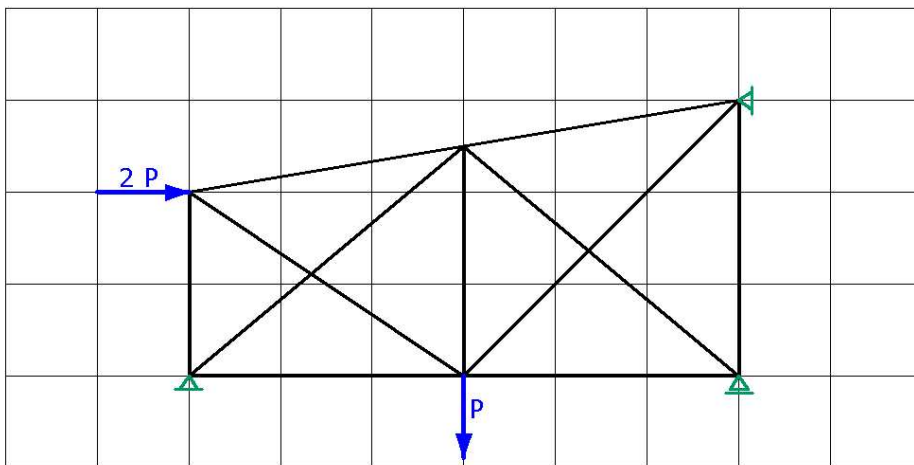
Przytoczone tutaj prawa transformacji mają charakter ogólny i będą wielokrotnie wykorzystywane dla innych elementów. Oczywiście, w zależności od tego, jak wielkim wektorem przemieszczeń węzłowych dysponujemy i jak wyglądają prawa transformacji poszczególnych składowych, postać macierzy transformacji  $T$  będzie każdorazowo formułowana indywidualnie.

### Zadania

1. Dana jest kratownica o geometrii przedstawionej na poniższej siatce.

Proszę:

- ponumerować węzły i pręty,
- sformułować macierze połączeń węzłów,
- obliczyć macierze sztywności elementów w układzie globalnym,
- dokonać agregacji globalnej macierzy sztywności układu,
- zmodyfikować układ równań zgodnie z warunkami brzegowymi.



Rysunek geometrii układu

Dane do zadania przyjąć z tablicy:

a	A	A	A	E	P
[m]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[GPa]	[kN]
1.2	12	16	20	200	4
2.0	18	24	32	200	3
1.0	35	40	50	80	1
1.5	20	25	30	100	3

2. Przemieszczenia węzłów stalowego elementu kratowego o przekroju  $A = 4\text{cm}^2$  i długości  $l = 2\text{m}$ , wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned}u_1 &= 0,01\text{m}, & u_2 &= -0,002\text{m}, \\v_1 &= 0,03\text{m}, & v_2 &= 0,0045\text{m}.\end{aligned}$$

Oblicz wydłużenie, odkształcenie, naprężenie i siłę w tym elemencie.