

## 4. METODY APROKSYMACYJNEGO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

### 4.1. Uwagi wstępne i koncepcje podstawowe

W wielu przypadkach, ważnych z punktu widzenia zastosowań technicznych, znalezienie rozwiązania równania różniczkowego w postaci analitycznej jest trudne lub wręcz niemożliwe do osiągnięcia. Taka sytuacja towarzyszy znacznej większości przypadków, szczególnie gdy w problemach mechaniki ośrodka ciągłego mamy do czynienia z nieregularną geometrią układów, bądź gdy właściwości materiałów są funkcjami zmiennych pól. Takie problemy nazywamy zadaniami nieliniowymi. Metoda elementów skończonych często w środowisku inżynierów bywa utożsamiana ze sposobem rozwiązywania problemów mechaniki, przy czym zapomina się że wszystkie te zagadnienia modelowane są za pomocą równań różniczkowych. Poniżej pragniemy pokazać, że metoda elementów skończonych jest przede wszystkim metodą rozwiązywania dowolnych równań różniczkowych.

Spośród metod znajdowania rozwiązań przybliżonych, które są użyteczne dla lepszego zrozumienia istoty MES, chcemy zwrócić uwagę na następujące:

- metoda Ritza,
- metoda wariacyjna Rayleigha - Ritza,
- metody ważonych reziduiów.

Wymieniane powyżej metody znajdowania przybliżonych rozwiązań równań różniczkowych są metodami całkowymi, gdyż opierają się na formach całkowych, nie zaś bezpośrednio na równaniach różniczkowych.

Metoda Ritza jest na tyle prosta, że nie wymaga dodatkowych informacji poszerzających klasyczny kurs matematyki. Metody wariacyjne, operujące pojęciami klasycznego rachunku wariacyjnego, wymagają choćby znajomości podstawowych formuł tego rachunku. Nie będziemy ich tutaj przedstawiali, jedynie proponujemy Czytelnikowi zapoznanie się z fragmentami literatury źródłowej.

Zanim przedstawimy metody Ritza i Rayleigha-Ritza, spróbujmy na przykładzie prostego problemu brzegowego prześledzić ideę koncepcji generalnej. Nasze rozważania zilustrujemy przykładem prostego przypadku pojedynczego równania różniczkowego z jedną tylko zmienną niezależną. By przedstawić różnice między kolejno omawianymi metodami będziemy analizować zawsze to samo równanie różniczkowe, którego rozwiązanie analityczne jest proste do osiągnięcia. Tym samym łatwo nam będzie porównać dokładność otrzymywanych przez aproksymację wyników z rozwiązaniami dokładnymi.

Przyjmijmy równanie różniczkowe zapisane symbolicznie:

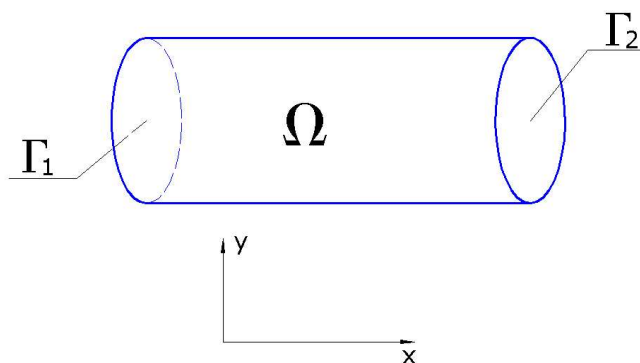
$$f(T(x)) = 0 \tag{4.1}$$

opisujące dowolne zagadnienie w przestrzeni  $\Omega$ , gdzie  $T$  opisuje funkcję zmian  $x$  (może to być np. temperatura, funkcja ugięcia belki), zaś  $\Omega$  jest obszarem działania funkcji rządzonej przez prawo zdefiniowane za pomocą operatora różniczkowego  $f$ .

Warunki brzegowe zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} g_1(T(x)) &= 0 \text{ na obszarze } \Gamma_1, \\ g_2(T(x)) &= 0 \text{ na obszarze } \Gamma_2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  zawierają te części  $\Omega$ , które ograniczają brzeg (rys. 4.1).



Rys. 4.1 Obszar jednowymiarowy działania funkcji  $f(T(x))$

Określmy rozwiązanie równania (4.1) łącznie z warunkami (4.2) w postaci funkcji:

$$T = T'(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot N_i(x), \quad (4.3)$$

która ma jedną bądź więcej niewiadomych  $a_i$ , zaś funkcje  $N_i$  spełniają dokładnie warunki brzegowe (4.2). Funkcje  $N_i$  nazywamy funkcjami próbnymi. Problem redukuje się więc do trafego wyboru funkcji próbnych  $N_i$  i znalezienia parametrów  $a_i$ . Ogólnie należy się więc spodziewać, że ciąg przyjętych aproksymacji

$$T^i = T'(x, a_i) = a_i \cdot N_i \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

polepsza rozwiązanie wraz ze wzrostem liczby stosowanych funkcji próbnych  $N_i$ . Przyjmowane funkcje  $N_i$  muszą być ciągłe i różniczkowalne do najwyższego rzędu występującego w całkowitej formie równania.

Nie powinno nikogo zaskoczyć, że  $T'$ , zastępujące w (4.1) funkcję  $T(x)$ , nie spełnia dokładnie tegoż równania, to znaczy, że  $f(T') \neq 0$ . Różnicę między rozwiązaniem dokładnym a przybliżonym oznaczymy przez  $R(x, a_i)$  i zapiszemy:

$$f(T'(x, a_i)) = R(x, a_i) \quad (4.5)$$

Rezydua  $R$  zależą od  $x$  oraz  $a_i$ . Z dokładnym rozwiązaniem mamy do czynienia wtedy, gdy  $R = 0$  dla wszystkich punktów obszaru  $\Omega$ . Dla rozwiązań przybliżonych  $R$  zasadniczo różni się od zera, jakkolwiek w wybranych punktach obszaru  $\Omega$  warunek ten może być spełniony.

#### 4.1.1. Metoda Ritza

Podstawowa metoda Ritza wymaga, by dla aproksymacji  $I$  rzędu był spełniony następujący warunek:

$$\int_{\Omega} R(x, a_i) = 0. \quad (4.6)$$

Powyższe wyrażenie prowadzi do równania algebraicznego z niewiadomym parametrem  $a_i$ . Dla poprawnie postawionego problemu z dobrze dobraną funkcją próbną rozwiązanie  $a_i$  zawsze istnieje. Za funkcje  $N_i(x)$  przyjmowane mogą być wielomiany, funkcje cykliczne oraz inne funkcje ciągłe i różniczkowalne. Zilustrujmy to, co dotąd powiedziano następującym przykładem.

**Przykład.** Rozwiążmy równanie różniczkowe zwyczajne o postaci:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + 1000 \cdot x^2 = 0 \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \quad (4.7)$$

przy zachowaniu następujących warunków brzegowych:

$$T(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad T(1) = 0 \quad (4.8)$$

Za funkcję próbną przyjmijmy funkcję nie zakłócającą problemu, spełniającą deklarowane warunki brzegowe:

$$N_1 = x \cdot (1 - x^2). \quad (4.9)$$

Poszukiwane rozwiązanie przyjmujemy więc w postaci:

$$T' = a_1 \cdot N_1(x) = a_1 \cdot x \cdot (1 - x^2). \quad (4.10)$$

Podstawiając je do równania wyjściowego (4.7), rezidua wynoszą:

$$R = \frac{d^2 T'}{dx^2} + 1000 \cdot x^2, \quad \text{gdzie} \quad \frac{d^2 T'}{dx^2} = -6 \cdot x \cdot a_1, \quad (4.11)$$

tak więc w końcu

$$R(x, a_1) = -6 \cdot a_1 \cdot x + 1000 \cdot x^2. \quad (4.12)$$

Spełnienie wymagania (4.6) pociąga konieczność dobrania współczynnika  $a_1$  na podstawie równania:

$$\int_0^1 (-6 \cdot a_1 \cdot x + 1000 \cdot x^2) dx = 0 \quad (4.13)$$

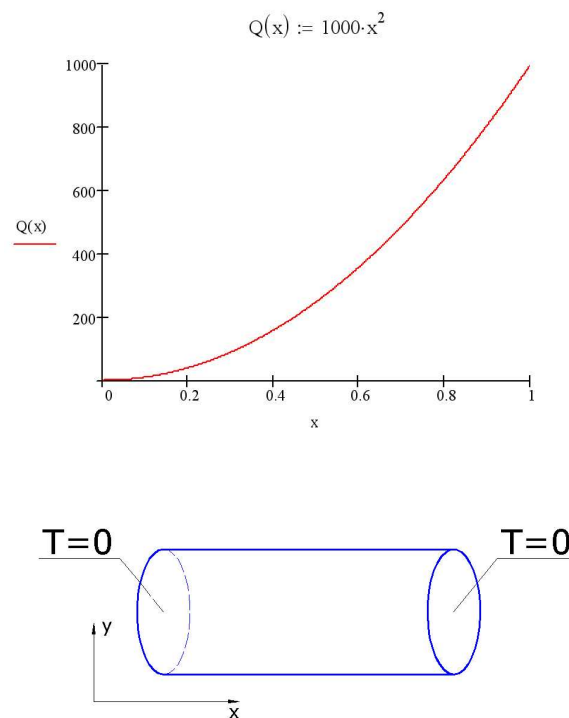
skąd otrzymujemy jedno równanie algebraiczne z niewiadomą  $a_1$  w postaci:

$$\left[ \left( -3 \cdot a_1 \cdot x + 1000 \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^1 = 0, \quad (4.14)$$

z którego wynika, że  $a_1 = \frac{1000}{9}$ , wobec czego otrzymane rozwiązanie przybliżone ma następującą formę:

$$T' = \frac{1000}{9} \cdot x \cdot (1 - x^2). \quad (4.15)$$

Warto w tym miejscu uzmysłowić sobie, że rozwiązanie równania różniczkowego przerodziło się niepostrzeżenie z problemu analizy matematycznej w problem algebraiczny. Otrzymany wynik będzie porównany z rozwiązaniem dokładnym. W tym miejscu prosi się dociekliwego Czytelnika, by zechciał samodzielnie znaleźć rozwiązanie nieskomplikowanego przecież równania (4.7).



Rys. 4.2 Interpretacja wydajności źródła ciepła i warunków brzegowych

Analizowane równanie jest formą równania przewodnictwa cieplnego w izolowanym pręcie, z wewnętrznym źródłem energii. Wydajność tego źródła jest proporcjonalna do  $x^2$  (rys.4.2).

Wyższych temperatur należy się spodziewać bliżej końca, dla  $x = 1$ , chociaż na obu brzegach powinien być spełniony warunek  $T = 0$ . Miejsce maksymalnej temperatury wypada dla  $x = 0.577$ . Należy podkreślić, że funkcje próbne, które w tym przypadku rozciągnięte są nad całym analizowanym obszarem, nie powinny zaburzać opisywanego zjawiska fizycznego, ale powinny dokładnie spełniać warunki brzegowe. W przyszłości technika MES wykaże, że można wyeliminować powyższe ograniczenia nakładane na funkcje próbne, które to ograniczenia są trudne do spełnienia w większości praktycznych problemów technicznych.

#### 4.1.2. Metoda wariacyjna Rayleigha-Ritza

Typowy problem jednowymiarowego rachunku wariacyjnego polega na znalezieniu takiej funkcji  $T(x)$ , by zminimalizować bądź zmaksymalizować całkę:

$$I = \int_a^b F(x, T(x), T_x(x)) dx, \quad (4.16)$$

gdzie  $T_x = \frac{dT}{dx}$  zaś  $F$  jest funkcjonałem (funkcją, której argumentami są funkcje). Można wykazać, że funkcjonał odpowiadający równaniu z poprzedniego przykładu ma postać:

$$F = -\frac{1}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 + 1000 \cdot x^2 \cdot T \quad (4.17)$$

Konsekwentne sformułowanie wariacyjne problemu z analizowanego przykładu wymaga więc ekstremalizacji następującego wyrażenia:

$$I = \int_0^1 \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 + 1000 \cdot x^2 \cdot T \right) dx \quad (4.18)$$

Idea polega więc na znalezieniu takiej funkcji  $T(x)$ , która minimalizuje  $I$ . Zanim pokażemy, w jaki sposób powyższe równanie może być używane do znalezienia przybliżonego rozwiązania analizowanego problemu, zauważmy, że:

- funkcja  $T(x)$ , która ekstremalizuje wyrażenie na  $I$ , jest funkcją spełniającą równanie różniczkowe i zadane warunki brzegowe,
- wyjściowe równanie różniczkowe zawiera wyrażenie drugiego rzędu, a sformułowanie wariacyjne - tylko pochodne pierwszego rzędu (jest to tzw. słabe sformułowanie).

**Przykład (cd.).** Przyjmijmy, podobnie jak poprzednio, funkcję próbną w postaci:

$$T' = a_1 \cdot N_1(x) = a_1 \cdot x \cdot (1 - x^2); \quad (4.19)$$

podstawiając to wyrażenie do wzoru (4.18), otrzymujemy:

$$I(a_1) = \int_0^1 \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{dT'}{dx} \right)^2 + 1000 \cdot x^2 \cdot T' \right) dx. \quad (4.20)$$

Zależność ta jest funkcją jedynej niewiadomej  $a_1$ . Stacjonarność będzie zapewniona przez spełnienie warunku

$$\frac{dI}{da_1} = 0. \quad (4.21)$$

Wobec tego, że

$$\frac{dT'}{da_1} = (-3 \cdot x^2 + 1) \cdot a_1,$$

ostatecznie otrzymujemy (4.20) w jawnej postaci:

$$I(a_1) = \int_0^1 \left( -\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot (1 - 3 \cdot x^2)^2 + 1000 \cdot x^2 \cdot (a_1 \cdot x \cdot (1 - x^2)) \right) dx \quad (4.20)$$

a po wykonaniu przepisanych operacji

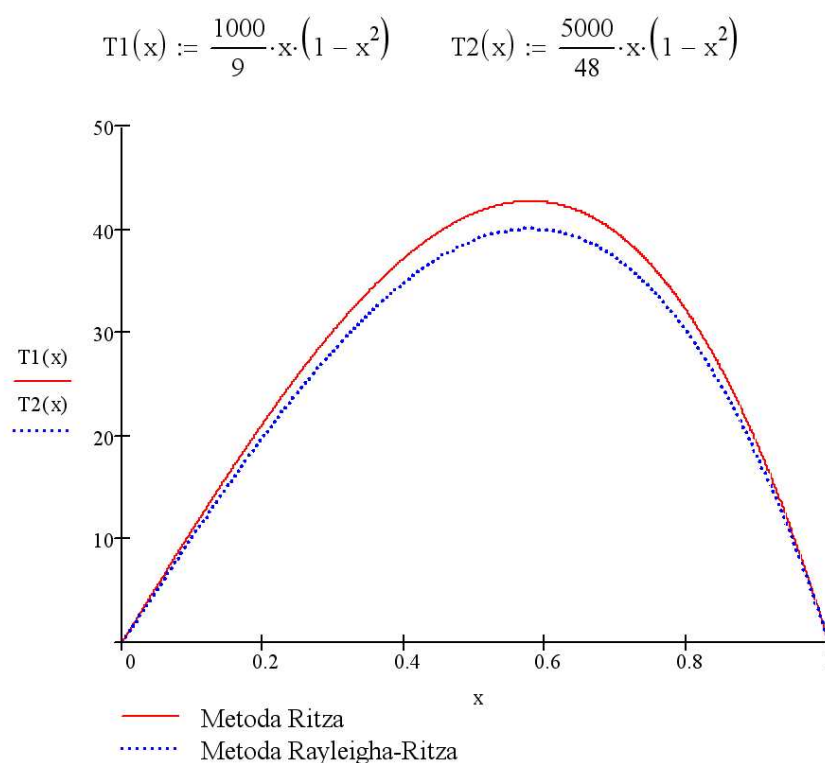
$$I(a_1) = \frac{1000}{12} \cdot a_1 - \frac{2}{5} \cdot a_1^2 \quad \text{więc także} \quad \frac{dI}{da_1} = \frac{1000}{12} - \frac{4}{5} \cdot a_1 = 0$$

i w końcu poszukiwaną wartość  $a_1 = \frac{5000}{48}$ .

Tym razem otrzymane rozwiązanie jest następujące:

$$T'(x) = \frac{5000}{48} \cdot x \cdot (1 - x^2). \quad (4.22)$$

Porównania dotąd otrzymanych rozwiązań dokonano na rysunku 4.3.



Rys. 4.3. Porównanie rozwiązań metodą Ritza i metodą wariacyjną

#### 4.2. Metoda ważonych reziduoów

Metoda ważonych reziduoów jest silnym narzędziem znajdowania przybliżonych rozwiązań równań różniczkowych powszechnie stosowanych w problemach inżynierskich. Poniżej prezentujemy cztery najbardziej popularne wersje tej metody. Pewną zaletą ważonych reziduoów jest możliwość omięcia sformułowań wariacyjnych, które częstokroć mogą sprawiać wiele trudności. Omówimy więc po krotce, posiłkując się ciągle tym samym przykładem, dwie wersje metody kollokacyjnej, znaną metodę najmniejszych kwadratoów oraz tzw. metodę Galerkina i bezpośrednio z niej wywodzącą się MES. Na koniec porównamy wyniki z poprzedniego przykłądu uzyskane przy zastosowaniu różnych metod.

Przedstawiając koncepcję ogólną, ograniczymy się, tak jak to miało miejsce poprzednio, do pojedynczego równania z jedną tylko zmienną niezależną

$$f(T(x)) = 0, \text{ działającego w obszarze } \Omega \quad (4.23)$$

z określonymi warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} g_1(T(x)) &= 0 \text{ na obszarze } \Gamma_1, \\ g_2(T(x)) &= 0 \text{ na obszarze } \Gamma_2, \end{aligned} \quad (4.24)$$

Podobnie przybliżymy rozwiązanie za pomocą funkcji próbnych  $N_i(x)$  i nieznanymi współczynnikami  $a_i$ :

$$T^n = T^n(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot N_i(x) \quad (4.25)$$

i otrzymamy spełnienie równania wyjściowego z dokładnością do reziduoów  $R(x, a_i)$ :

$$f(T^n(x, a_i)) = R(x, a_i) \quad (4.26)$$

Metody ważonych reziduoów zakładają wyznaczenie parametrów  $a_i$  przez spełnienie określonego warunku:

$$\int_{\Omega} w(x) \cdot R_i(x, a_i) = 0, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.27)$$

gdzie funkcje  $w(x)$  są tzw. funkcjami wagowymi. Wybór tych funkcji różnicuje wersje metody ważonych reziduoów. Zauważmy, że przyjmując w zadaniu z jedną tylko niewiadomą stałą funkcję wagową  $w(x) = 1$ , otrzymamy znaną już nam wersję metody Ritza.

### 4.2.2. Punkt kollokacji

W tej wersji metody ważonych reziduoów za funkcję wagi przyjmuje się wyrażenie

$$w_i(x) = \delta \cdot (x - x_i), \quad (4.28)$$

gdzie  $\delta$  pełni funkcję delty Kroneckera, która jest zdefiniowana następująco:

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta \cdot (x_i - x) dx &= 1, \quad \text{dla } x_i \in (a, b), \\ \int_a^b \delta \cdot (x_i - x) dx &= 0, \quad \text{dla } x_i \notin (a, b), \end{aligned} \quad (4.29)$$

gdzie współrzędna  $x_i$  opisuje położenie punktu kollokacji i wybierana jest na etapie formułowania ograniczenia. Przy stosowaniu  $n$  funkcji próbnych wymaga się - w celu wyznaczenia wszystkich współczynników  $a_i$  - zastosowania  $n$  punktów kollokacji. Ograniczenia wyglądają wówczas następująco:

$$\int_{\Omega} \delta \cdot (x - x_i) \cdot R(x, a_i) = 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.30)$$

Formułując je w  $n$  punktach  $x_i$ , otrzymujemy układ równań algebraicznych, z którego wyznaczymy niewiadome  $a_i$ .

**Przykład (cd.).** Wracając do naszego przykładu, wielkości reziduoów są zdefiniowane jak poprzednio:  $R(x, a_i) = -6 \cdot a_i \cdot x + 1000 \cdot x^2$ . Przy przyjętej tylko jednej funkcji próbnej wymaga się spełnienia ograniczenia typu (4.30) w jednym tylko punkcie, na przykład  $x_1 = \frac{1}{2}$ .

Wówczas otrzymujemy:

$$-6 \cdot a_1 \cdot \frac{1}{2} + 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0, \quad \text{czyli } a_1 = \frac{1000}{12} \quad (4.31)$$

Rozwiązanie końcowe jest tym razem w postaci:

$$T^1(x) = \frac{1000}{12} \cdot x \cdot (1 - x^2). \quad (4.32)$$

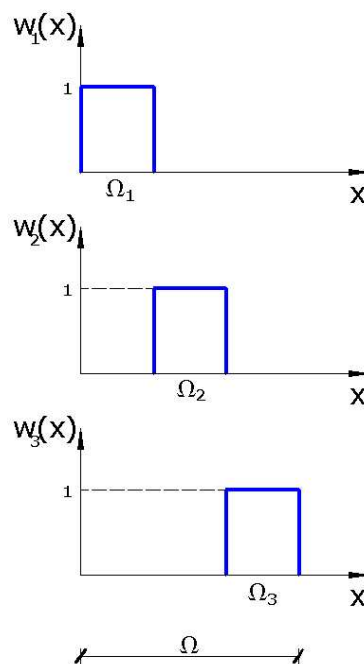
#### 4.2.2. Podobszar kollokacji

Funkcje wagi w tej metodzie dobiera się w taki sposób, że ich wartości są równe 1 w danej części obszaru  $\Omega_i$ , natomiast na pozostałej części obszaru  $\Omega$  są równe zero. Podobszarów kollokacji definiuje się tyle ile jest przyjętych funkcji próbnych. Sytuację ilustruje rysunek 4.4, który przykładowo dzieli cały obszar na trzy podobszary. Matematycznie funkcje wag w poszczególnych podobszarach wyrażone są następująco:

$$w_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_1 \\ 0 & x \notin \Omega_1, \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_2 \\ 0 & x \notin \Omega_2, \end{cases}$$

$$w_3(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_3 \\ 0 & x \notin \Omega_3 \end{cases}$$



Rys. 4.4. Przyjęte funkcje wagowe w podobszarze kollokacji

Podobszary  $\Omega_i$  nie zawierają wspólnych elementów, lecz w sumie wypełniają cały obszar  $\Omega$ . Te założenia w konsekwencji prowadzą do następującego układu równań, którego rozwiązanie pozwala wyznaczyć niewiadome współczynniki  $a_i$ :

$$\int_{\Omega_i} R(x, a_i) = 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.33)$$

**Przykład (cd.).** W naszym przypadku przyjęcie jednej funkcji próbnej wymaga potraktowania całego obszaru  $\Omega$  jako jednego tylko podobszaru kolokacji  $\Omega = \Omega_1$ . Tak więc  $\Omega_1 = \langle 0, 1 \rangle$ , a całość sprowadza się do spełnienia warunku identycznego z warunkiem Ritza:

$$\int_{\Omega} R(x, a_1) = 0, \quad (4.34)$$

skąd także

$$\int_0^1 (-6 \cdot a_1 \cdot x + 1000 \cdot x^2) dx = 0 \quad \text{oraz} \quad a_1 = \frac{1000}{9} \quad (4.35)$$

i końcowy wynik jest identyczny z tym, który otrzymaliśmy poprzednio stosując propozycję Ritza:

$$T'(x) = \frac{1000}{9} \cdot x \cdot (1 - x^2) \quad (4.36)$$

### 4.2.3. Metoda najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów jest powszechnie znana wszystkim tym, którzy stają przed problemem opracowania wyników eksperymentu. Polega ona na zminimalizowaniu wyrażenia typu:

$$\int_{\Omega} (R(x, a_i))^2 dx = 0, \quad (4.37)$$

co oznacza, że cząstkowe pochodne powyższej całki względem kolejnych współczynników  $a_i$  mają być równe zero. Otrzymujemy więc układ równań algebraicznych o postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_1} &= \frac{\partial}{\partial a_1} \int_{\Omega} (R)^2 dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial a_1} (R(x, a_i))^2 dx = \int_{\Omega} R \frac{\partial R}{\partial a_1} dx = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial a_2} &= \frac{\partial}{\partial a_2} \int_{\Omega} (R)^2 dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial a_2} (R(x, a_i))^2 dx = \int_{\Omega} R \frac{\partial R}{\partial a_2} dx = 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial I}{\partial a_n} &= \frac{\partial}{\partial a_n} \int_{\Omega} (R)^2 dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial a_n} (R(x, a_i))^2 dx = \int_{\Omega} R \frac{\partial R}{\partial a_n} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Widzimy więc, że role funkcji wagowych w powyższych równaniach pełnią pochodne reziduów, a więc

$$w_i(x) = \frac{\partial R}{\partial a_i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

**Przykład (cd.).** Wracając znów do analizowanego przykładu, mamy funkcję reziduów w znanej już nam dobrze postaci (4.12), funkcja zaś wagowa tym razem określona jest jako

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = -6 \cdot x, \quad (4.39)$$

i w związku z czym podstawiając do (4.27), otrzymujemy

$$\int_0^1 -6 \cdot x \cdot (-6 \cdot a_1 \cdot x + 1000 \cdot x^2) dx = [12 \cdot x^3 \cdot a_1 - 1500 \cdot x^4]_0^1 = 0,$$

skąd

$$a_1 = \frac{1000}{48} \quad (4.40)$$

Rozwiązanie otrzymane tym sposobem wynosi:

$$T^*(x) = \frac{1000}{8} \cdot x \cdot (1 - x^2). \quad (4.41)$$

#### 4.2.4. Metoda Galerkina

Ostatnią z proponowanych tu metod opierających się na ważonych reziduach jest metoda zaproponowana przez Galerkina. Polega ona na przyjęciu, że rolę funkcji wagowej pełni przyjmowana funkcja próbna. Zakładamy więc, że  $w_i(x) = N_i(x)$  i żądamy - w przypadku używania kilku funkcji próbnych jednocześnie - spełnienia warunków:

$$\int_{\Omega} N_i(x) \cdot R(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.42)$$

**Przykład (cd.).** Ponieważ, jak dotąd, zawsze przyjmowaliśmy funkcję próbną w postaci  $N_1(x) = x \cdot (1 - x^2)$ , wymagamy więc teraz spełnienia warunku.

$$\int_0^1 x \cdot (1-x^2) \cdot (-6 \cdot a_1 \cdot x + 1000 \cdot x^2) dx = 0 \quad (4.43)$$

który prowadzi do wielkości współczynnika  $a_1 = \frac{5000}{48}$ . Otrzymana tak funkcja  $T'(x)$  ma postać:

$$T'(x) = \frac{5000}{48} \cdot x \cdot (1-x^2) \quad (4.44)$$

Tym razem wynik pokrywa się z wynikiem otrzymanym w wariacyjnej metodzie Rayleigha-Ritza.

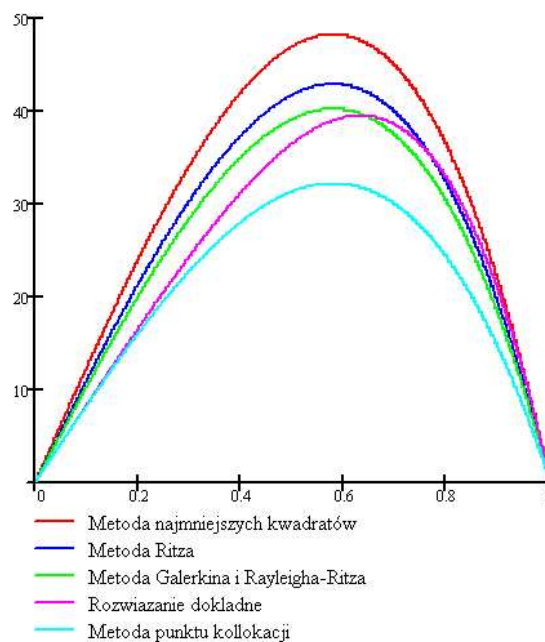
Spróbujmy na koniec tych rozważań porównać otrzymane wyniki z prostym do uzyskania rozwiązaniem dokładnym. Postać tego rozwiązania jest następująca:

$$T(x) = \frac{1000}{12} \cdot x \cdot (1-x^2) \quad (4.45)$$

Zwróćmy uwagę, że potęga zmiennej w nawiasie jest wyższa od tej, którą przyjmowaliśmy w funkcji próbnej. Można by powiedzieć, że nasze poszukiwania skazane były na częściowe tylko powodzenie, gdyż posługiwaliśmy się tylko jedną funkcją próbną, która odbiegała postacią od rozwiązania dokładnego. Trzeba w tym miejscu podkreślić raz jeszcze, że zwiększając liczbę wyrazów wielomianu,

$$T1(x) := \frac{1000}{8} \cdot x \cdot (1-x^2) \quad T2(x) := \frac{1000}{9} \cdot x \cdot (1-x^2) \quad T3(x) := \frac{5000}{48} \cdot x \cdot (1-x^2)$$

$$T5(x) := \frac{1000}{12} \cdot x \cdot (1-x^2) \quad T4(x) := \frac{1000}{12} \cdot x \cdot (1-x^2)$$



Rys. 4.5. Porównanie rozwiązań otrzymanych różnymi metodami

a tym samym zwiększając liczbę niewiadomych współczynników, nasze rozwiązania zbliżałyby się do dokładnego. Gdybyśmy od razu przyjęli funkcję próbną w postaci  $N_1(x) = x \cdot (1 - x^3)$ , każda z wymienionych tu metod doprowadziłaby nas do rozwiązania dokładnego. Celowo nie uczyniliśmy tego, gdyż w przypadkach ważnych z punktu widzenia zastosowań praktycznych nie sposób jest przewidzieć postać równania, bo nie są znane rozwiązania analityczne.

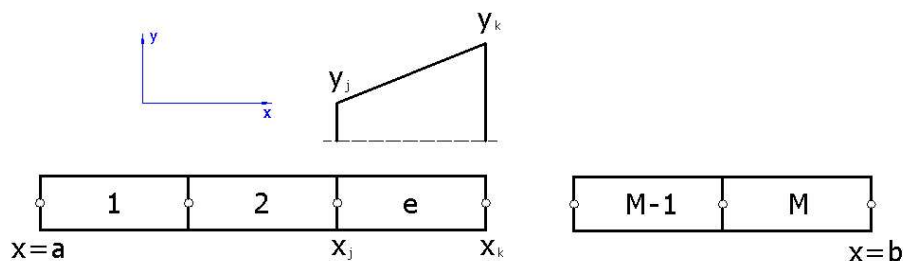
Rysunek 4.5 przedstawia krzywe naszego rozwiązania. Linia ciągłą zaznaczono rozwiązanie dokładne. Widzimy, że w analizowanym przypadku metody najmniejszych kwadratów i podobszarów kollokacji prowadziły do określenia temperatur znacznie wyższych niż dokładne.

Podkreślmy raz jeszcze, co jest niezwykle ważne przy analizowanej aproksymacji, że przyjmowane funkcje próbne rozpięte są nad całym obszarem  $\Omega$ . Dalej, przyjmując koncepcję podziału całego obszaru na części (elementy), będziemy omawiać aproksymację tylko na fragmencie obszaru, co w znacznym stopniu ułatwi nam zadanie. Warto w tym miejscu wspomnieć, że w przypadku choć trochę skomplikowanych warunków brzegowych nie można zaproponować funkcji próbnych spełniających wymieniane powyżej wymagania co do dokładnego spełnienia warunków brzegowych i niezakłócania problemu fizycznego.

#### 4.2.5. Przykład MES w aproksymacji Galerkina

Zasadnicze nowe elementy, które chcemy teraz wprowadzić, polegać będą na przyjęciu nawet prostszej, bo liniowej funkcji próbnej, ale przykładanej tylko lokalnie na pewnym podobszarze, który nazywać będziemy elementem skończonym.

Założmy więc, że obszar zawarty między punktami  $x = a$  i  $x = b$ , ( $a \leq x \leq b$ ) został podzielony na  $M$  podobszarów (elementów), tak jak to pokazano na rysunku 4.6. Proces ten nazywamy dyskretyzacją. Przeanalizujmy zatem element o dwóch węzłach w punktach  $x_k$  oraz  $x_j$ . Dowolną wielkość, która na tym obszarze ma podlegać zmianom (może to być np. przemieszczenie lub jak w naszym przykładzie temperatura) oznaczmy przez  $y(x)$ . Niech na obszarze elementu zmiana tej wielkości będzie opisana za pomocą zależności



Rys. 4.6. Podział obszaru jednowymiarowego na elementy.

$$y^e(x) = m \cdot x + b \quad (4.46)$$

gdzie  $e$  oznacza, że aproksymacja dotyczy wyłącznie elementu, a wartości współczynników  $m$  i  $b$  wyznaczymy z następujących warunków:

$$\begin{aligned} \text{dla } x = x_j & \quad y^e(x_j) = y_j, \\ \text{dla } x = x_k & \quad y^e(x_k) = y_k. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Podstawiając te warunki do równania (4.46), po rozwiązaniu układu równań z niewiadomymi  $m$  i  $b$  otrzymujemy:

$$m = \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j}, \quad b = y_j - \left( \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j} \right) \cdot x_j \quad (4.48)$$

i funkcję opisującą zmianę wielkości  $y^e(x)$  na obszarze elementu w postaci:

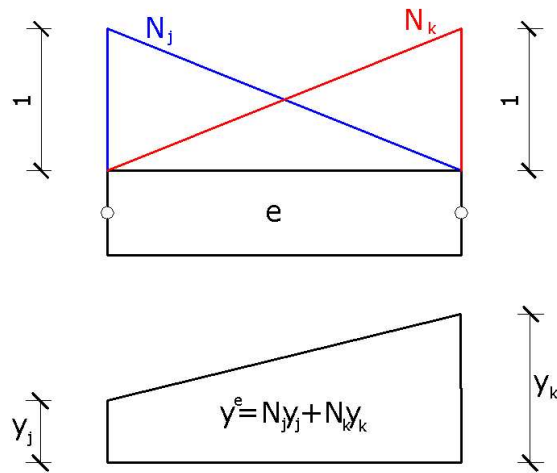
$$y^e(x) = \left( \frac{x_k - x}{x_k - x_j} \right) \cdot y_j + \left( \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) \cdot y_k, \quad (4.49)$$

przy czym wielkości  $y_j$  i  $y_k$  pełnią rolę podobną do tej, którą pełniły współczynniki  $a_i$  w poprzednich rozważaniach. Powyższą zależność można więc zapisać jako

$$y^e(x) = N_j(x) \cdot a_j + N_k(x) \cdot a_k. \quad (4.50)$$

Przyjmowane więc funkcje próbne (kształtu) są tym razem funkcjami liniowymi i wyrażają się następującymi zależnościami:

$$N_j(x) = \frac{x_k - x}{x_k - x_j}, \quad N_k(x) = \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (4.51)$$



Rys. 4.7. Liniowe funkcje próbne w obszarze elementu

Zmienność tych funkcji pokazano na rysunku 4.7. Ogólnie można więc zapisać zmienność pola  $y^e(x)$  stosując notację macierzową:

$$y^e(x) = N \cdot a^e, \quad (4.52)$$

gdzie dwuelementowa macierz  $N$  gromadzi funkcje kształtu, a wektor  $a^e$  zawiera wartości zmiennych pola punktach węzłowych.

**Przykład (cd.).** Powróćmy do naszego przykładu. Pamiętajmy, że w metodzie Galerkina funkcjami wagi były funkcje próbne  $N(x)$ . Przyjmijmy więc teraz równanie opisujące zmianę temperatury  $T^e(x)$  dla pojedynczego elementu skończonego w przedziale od  $x_j$  do  $x_k$ .

$$T^e(x) = N_j(x) \cdot T_j + N_k(x) \cdot T_k, \quad (4.53)$$

gdzie  $T_j$  i  $T_k$  odpowiadają teraz zmiennym  $a_i$  w metodzie Galerkina, a funkcje kształtu mają znaną liniową postać. Równania Galerkina można zapisać w postaci:

$$\sum_{e=1}^M \int_{x_j}^{x_k} N_j(x) (R^e(x, T_j, T_k)) dx = 0, \quad (4.54)$$

$$\sum_{e=1}^M \int_{x_j}^{x_k} N_k(x) (R^e(x, T_j, T_k)) dx = 0,$$

przy czym  $M$  odpowiada liczbie elementów przyjętych w dyskretyzacji. Układ (4.54) można również zapisać macierzowo

$$\sum_{e=1}^M \int_{x_j}^{x_k} N^T(x) (R^e(x, T_j, T_k)) dx = 0. \quad (4.55)$$

W naszym przykładzie rezidua  $R^e$  dla typowego elementu wyrażają się znaną zależnością:

$$R^e = \frac{d^2 T^e}{dx^2} + 1000 \cdot x^2. \quad (4.56)$$

Otrzymujemy więc:

$$\sum_{e=1}^M \int_{x_j}^{x_k} N^T(x) \left( \frac{d^2 T^e}{dx^2} + 1000 \cdot x^2 \right) dx = 0. \quad (4.57)$$

Na tym etapie pomińmy sumowanie i poprzestańmy na analizie jednego tylko elementu. Przedstawmy powyższe równanie w postaci dwóch całek:

$$\int_{x_j}^{x_k} N^T(x) \cdot \frac{d^2 T^e}{dx^2} dx + \int_{x_j}^{x_k} N^T(x) \cdot (1000 \cdot x^2) dx = 0; \quad (4.58)$$

całkując pierwsze wyrażenie przez części, otrzymujemy:

$$\left[ N^T \cdot \frac{dT^e}{dx} \right]_{x_j}^{x_k} - \int_{x_j}^{x_k} \frac{dN^T}{dx} \cdot \frac{dT^e}{dx} dx + \int_{x_j}^{x_k} N^T \cdot (1000 \cdot x^2) dx = 0, \quad (4.59)$$

ponieważ przyjęto w aproksymacji, że  $T^e = N \cdot a^e$ , skąd:

$$\left[ N^T \cdot \frac{dT^e}{dx} \right]_{x_j}^{x_k} - \int_{x_j}^{x_k} \frac{dN^T}{dx} \cdot \frac{dN}{dx} \cdot a^e dx + \int_{x_j}^{x_k} N^T \cdot (1000 \cdot x^2) dx = 0, \quad (4.60)$$

gdzie wyrażenie  $\int_{x_j}^{x_k} \frac{dN^T}{dx} \cdot \frac{dN}{dx} dx$  nazywane jest macierzą sztywności elementu i oznaczane przez  $K^e$ . Ze

względu na to, że wektor  $a^e$ , opisujący wartości temperatur w węzłach, nie zależy od zmiennej  $x$ , powyższe równanie możemy zapisać macierzowo w postaci:

$$K^e \cdot a^e = f^e \quad (4.61)$$

Macierz sztywności  $K^e$  o wymiarach  $2 \times 2$  jest macierzą symetryczną i osobiwą. Pozostałe wektory  $a^e$  i  $f^e$  mają wymiary  $2 \times 1$ . Wyniki działań we wzorze (4.60) przedstawiają się następująco:

$$K^e = \frac{1}{x_k - x_j} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

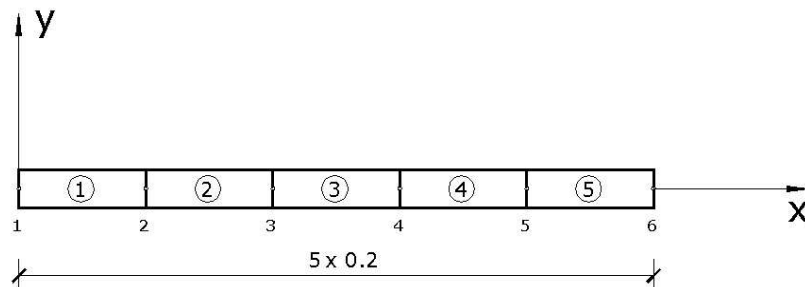
$$\left[ \frac{dT}{dx} \cdot N^T \right]_{x_j}^{x_k} = \frac{dT(x_k)}{dx} \cdot N^T(x_k) - \frac{dT(x_j)}{dx} \cdot N^T(x_j), \quad (4.62)$$

gdzie

$$N^T(x_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ i } N^T(x_j) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\int_{x_j}^{x_k} N^T \cdot (1000 \cdot x^2) dx = \frac{1000}{x_k - x_j} \begin{bmatrix} x_k^4 - 4 \cdot x_k \cdot x_j^4 + 3 \cdot x_j^4 \\ 3 \cdot x_k^4 - 4 \cdot x_j \cdot x_k^4 + x_j^4 \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$



Rys. 4.8. Dyskretyzacja MES przykładu w aproksymacji Galerkiina (podział na 5 elementów)

Dokonajmy teraz dyskretyzacji rozważanego przedziału na pięć równych części (elementów) o długości 0.2 każdy. W wyniku tego podziału otrzymamy obraz, jaki pokazano na rysunku 4.8. Niewiadomymi są teraz temperatury w sześciu węzłach. Zgodnie z (4.62) macierze sztywności elementów są identyczne i wynoszą:

$$K^e = \frac{1}{x_k - x_j} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.2 - 0.0} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$K^1 = K^2 = K^3 = K^4 = K^5. \quad (4.64)$$

Wektory prawych stron równania (4.61) dla elementów otrzymamy w postaci:

$$\begin{aligned}
 f^1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_2)}{dx} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_1)}{dx} + \frac{1000}{0.2-0.0} \begin{bmatrix} 0.2^4 - 4 \cdot 0.2 \cdot 0.0^4 + 3 \cdot 0.0^4 \\ 3 \cdot 0.2^4 - 4 \cdot 0.0 \cdot 0.2^4 + 0.0^4 \end{bmatrix}, \\
 f^1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_2)}{dx} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_1)}{dx} + \begin{bmatrix} 0.667 \\ 2.000 \end{bmatrix}, \\
 f^2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_3)}{dx} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_2)}{dx} + \begin{bmatrix} 7.300 \\ 11.30 \end{bmatrix}, \\
 f^3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_4)}{dx} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_3)}{dx} + \begin{bmatrix} 22.00 \\ 28.60 \end{bmatrix}, \\
 f^4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_5)}{dx} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_4)}{dx} + \begin{bmatrix} 44.70 \\ 54.00 \end{bmatrix}, \\
 f^5 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_6)}{dx} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{dT(x_5)}{dx} + \begin{bmatrix} 75.40 \\ 87.30 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Podobnie jak to czyniliśmy poprzednio, dokonujemy agregacji macierzy sztywności całego układu oraz wektora prawych stron zależności

$$K \cdot a = f \tag{4.66}$$

gdzie teraz macierz  $K$  oraz wektory  $a$  i  $f$  opisują stan układu odniesiony do współrzędnych globalnych. Po scaleniu otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.667 - dT(x_1)/dx \\ 9.33 \\ 33.33 \\ 73.33 \\ 129.40 \\ 87.3 + dT(x_6)/dx \end{bmatrix}. \tag{4.67}$$

Wprowadzając warunki brzegowe (w węzłach 1 i 6 temperatura jest równa zero), czyli na przykład wykreślając z układu równań pierwszy i ostatni wiersz oraz pierwszą i ostatnią kolumnę z macierzy sztywności, otrzymujemy układ równań z czterema niewiadomymi. Rozwiązaniem tego układu są następujące wyniki:

$$T_1 = 0, T_2 = 16.5, T_3 = 31.2, T_4 = 39.2, T_5 = 32.5, T_6 = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że otrzymane wyniki prawie w ogóle nie odbiegają od rozwiązania analitycznego oczywiście co do wartości temperatur w wybranych przez dyskretyzację punktach. Warto zauważyć, że zabieg dyskretyzacji mimo przyjęcia funkcji próbnych w prostej postaci funkcji liniowych prowadzi do osiągnięcia bardzo dużej dokładności aproksymacji rozwiązania analitycznego.

### Zadania

- Przeanalizuj problem (4.7) z warunkami (4.8) wszystkimi przedstawionymi w tym rozdziale metodami, przyjmując funkcje próbne w postaci:

a) 
$$N_1(x) = x \cdot (1 - x^4),$$

b) 
$$N_1(x) = \sin(\pi x)$$

- Znajdź rozwiązanie problemu (4.7) metodą Ritza przyjmując funkcję próbną w postaci:

$$N_1(x) = x \cdot (1 - x^3).$$

W jaki sposób rozwiązanie to odpowiada rozwiązaniu dokładnemu? Uogólnij otrzymany wynik.

- Przyjmij równanie różniczkowe w postaci:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \cdot y = 10 \cdot x \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 2,$$

przy spełnieniu warunków brzegowych  $y(0) = 1$  i  $y(2) = 0$ . Sprawdź, że funkcjonal, który podlega ekstremalizacji w metodzie Rayleigha-Ritza jest wyrażony w postaci:

$$I = \int_0^2 \left[ 3 \cdot y - 10 \cdot x \cdot y - \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx.$$

- Przeanalizuj problem (4.7) metodą punktów kollokacji, przyjmując dwie funkcje próbne

$$N_1(x) = x \cdot (1 - x^2),$$

$$N_2(x) = x \cdot (1 - x^4),$$

oraz dwa punkty kollokacji dla współrzędnych  $x = \frac{1}{3}$  i  $x = \frac{2}{3}$ .

5. Rozwiąż problem z zadania 4 metodą najmniejszych kwadratów.
6. Przeanalizuj problem (4.7) metodą punktu kollokacji, zakładając  $x = 0.2, x = 0.4, x = 0.6, x = 0.8$ . Sporządź wykresy i porównaj otrzymane rozwiązania z wynikiem dokładnym.
7. Oblicz ugięcie belki swobodnie podparte o rozpiętości  $l$  obciążonej ciężarem równomiernie rozłożonym o intensywności  $q$  przyjmując funkcje próbne:

$$N_1(x) = x \cdot (1 - x),$$

$$N_1(x) = x \cdot \left(1 - \sin \frac{\pi \cdot x}{2 \cdot l}\right),$$

- a) metodą punktu kollokacji dla  $x = 0.5$  i podobszaru kollokacji przyjętego dla całego przedziału,
  - b) metodą najmniejszych kwadratów.
- Porównaj otrzymane ugięcie w środku rozpiętości z wynikiem dokładnym.