

5. PODSTAWOWE SFORMUŁOWANIA METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W NAWIĄZANIU DO RÓWNAŃ MECHANIKI KONTINUUM

5.1. Podstawowe równania liniowej sprężystości

Stosowany w niniejszym opracowaniu opis omawianych zagadnień odnosi się do prostokątnego układu współrzędnych kartezjańskich $[x, y, z]$ lub, gdy stosujemy zapis wskaźnikowy, do układu $[x_1, x_2, x_3]$. Chcąc zdefiniować podstawowy układ równań opisujący stan naprężenia, stan odkształcenia i pole przemieszczeń układu, będziemy się posługiwać następującymi oznaczeniami.

Niech stan naprężenia w nieskończenie małej objętości ciała poddanego działaniu obciążenia będzie opisany w układzie współrzędnych za pomocą składowych tensora, uporządkowanych w macierzy σ_{ij} w postaci:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

gdzie składowe $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ są naprężeniami normalnymi, natomiast $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ opisują naprężenia styczne. Tensor stanu naprężenia (5.1) jest symetryczny, to znaczy, że zachodzą następujące równości:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}. \quad (5.2)$$

Stosując konsekwentnie zapis macierzowy, wygodnie jest niekiedy opisać stan naprężenia za pomocą wektora naprężenia σ o następujących składowych:

$$\sigma = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}]^T. \quad (5.3)$$

Tutaj, tak jak i poprzednio, za pomocą identycznych indeksów oznaczono składowe normalne, indeksy zaś różne, opisujące składowe macierzy σ informują o składowych stycznych stanu naprężenia.

Stan odkształcenia, podobnie jak poprzednio nawiązujący do opisu tensorowego, reprezentuje macierz składowych ε_{ij} w postaci:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

W zapisie macierzowym posługiwać się będziemy wektorem odkształcenia ε , którego składowe odniesione do układu $[x, y, z]$, są następujące:

$$\varepsilon = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]^T \quad (5.6)$$

Zwracamy w tym miejscu uwagę, że we wzorze (5.5) posługujemy się tzw. inżynierskimi definicjami odkształceń stycznych, związanymi z odpowiednimi składowymi tensora odkształceń za pomocą związków:

$$\gamma_{xy} = 2 \cdot \varepsilon_{xy}, \quad \gamma_{yz} = 2 \cdot \varepsilon_{yz}, \quad \gamma_{xz} = 2 \cdot \varepsilon_{xz}. \quad (5.6)$$

Przyjęcie w zapisie macierzowym miar inżynierskich odkształceń (γ - kąt odkształcenia postaciowego) podyktowane jest dwoma faktami. Pierwszy to ich powszechne używanie w klasycznych zagadnieniach liniowej sprężystości. Drugi zaś wynika z konieczności spójnego potraktowania miar naprężeń i odkształceń, by w prosty sposób można było zapisać wyrażenie na pracę w obu zapisach - wskaźnikowym i macierzowym:

$$\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} = \sigma^T \cdot \varepsilon. \quad (5.7)$$

Oprócz pól naprężeń i odkształceń do zapisania podstawowego układu równań konieczne jest jeszcze pole przemieszczeń, którego składowe w punkcie opisane są w zapisie wskaźnikowym:

$$u_i = [u_1, u_2, u_3]^T, \quad (5.8)$$

lub w macierzowym:

$$u = [u, v, w]^T. \quad (5.9)$$

5.1.1. Podstawowe równania w zapisie wskaźnikowym

Dla przypomnienia zapiszmy podstawowy układ równań liniowej teorii sprężystości. Typowa analiza ciała odkształcalnego wymaga znalezienia funkcji naprężeń σ lub przemieszczeń u spełniających następujące równania: - trzy równania różniczkowe cząstkowe równowagi (równania Naviera)

$$\sigma_{ij} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.10)$$

gdzie w zapisie wskaźnikowym zastosowano umowę sumacyjną, co znaczy, że powtarzający się w jednomianie wskaźnik informuje o konieczności dokonania sumowania po wszystkich możliwych jego wartościach, a występujący między wskaźnikami znak przecinka jest symbolem różniczkowania względem

odpowiedniej zmiennej przestrzennej; na przykład $\sigma_{21,1} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1}$;

- sześć równań różniczkowych cząstkowych geometrycznych (równania Cauchy'ego)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (5.11)$$

- sześć równań algebraicznych fizycznych (równania Hooke'a)

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \quad (5.12)$$

Z powyższego zapisu nie wynika deklarowana uprzednio liczba równań, ale biorąc pod uwagę założenia o izotropii, układ (5.12) redukuje się tylko do sześciu niezależnych równań i występujących w nich tylko dwóch stałych materiałowych. Ponadto poszukiwane rozwiązania muszą dodatkowo spełniać:

- równania nierozdzielności geometrycznej

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (5.13)$$

w każdym punkcie obszaru, oraz

- naprężeniowe i przemieszczeniowe warunki brzegowe

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = p_i^* \quad \text{na brzegu } S_\sigma, \quad (5.14)$$

$$u_i = u_i^* \quad \text{na brzegu } S_u, \quad (5.15)$$

przy czym oba deklarowane brzegi S_σ i S_u są rozłączne, tworząc w sumie cały brzeg rozpatrywanego obszaru, tzn. $S_\sigma \cap S_u = \emptyset$ oraz $S_\sigma \cup S_u = S$.

Domyślamy się, że ze względu na złożoność wymagań nakładanych na rozwiązania problemów, określenie funkcji analitycznych, spełniających równania (5.10) - (5.15), nie jest łatwe. W szczególności zadanie staje się niemożliwe do rozwiązania, jeśli skomplikuje się warunki brzegowe problemu. Zauważmy jeszcze, że rozwiązanie problemu mechanicznego, opisanego za pomocą tak skonstruowanego modelu matematycznego, prowadzi do zadania analizy matematycznej.

Trudności, na które natrafia się przy takim sformułowaniu, skłaniają do poszukiwania innych rozwiązań, tym razem już nie analitycznych lecz rozwiązań przybliżonych.

5.1.2. Podstawowe równania w zapisie macierzowym

Rozpocznijmy tym razem od równań geometrycznych. Odpowiednie składowe wektora odkształceń można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.\end{aligned}\quad (5.16)$$

Używając poprzednio wprowadzonych oznaczeń, zapiszemy powyższy układ zależności w postaci:

$$\varepsilon = L \cdot u, \quad (5.17)$$

gdzie macierz operatorów różniczkowych L ma wymiar (6×3) a jej składowe można przedstawić jako

$$L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Równania równowagi można teraz zapisać krótko:

$$L^T \cdot \sigma + b = 0, \quad (5.19)$$

gdzie b jest wektorem sił masowych. Zwróćmy uwagę na fakt, że macierz operatorów różniczkowych równań równowagi (5.19) jest transponowana do odpowiedniej macierzy związków geometrycznych.

Równania fizyczne (konstrytywne), jako zależności między składowymi wektorów naprężeń i odkształceń, określone są następująco:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_z}{E}, & \gamma_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_z}{E}, & \gamma_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z - \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y}{E}, & \gamma_{zx} &= \frac{\sigma_{zx}}{G},\end{aligned}\quad (5.20)$$

gdzie przez E oznaczono moduł odkształcalności podłużnej (moduł Younga), zaś $G = E/2 \cdot (1 + \nu)$ jest modułem odkształcalności postaciowej (moduł Kirchhoffa), ν jest liczbą Poissona. W postaci równania macierzowego powyższą zależność konstytutywną można wyrazić jako

$$\varepsilon = C \cdot \sigma, \quad (5.21)$$

gdzie

$$C = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \nu) \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Zależność (5.21) jest jednoznaczna, a kwadratowa macierz konstytutywna jest nieosobliwa, istnieje więc odwzorowanie odwrotne

$$\sigma = D \cdot \varepsilon, \quad (5.23)$$

gdzie macierz $D = C^{-1}$ i jej reprezentacja przedstawia się następująco:

$$D = \frac{E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - 2 \cdot \nu) / 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2 \cdot \nu) / 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2 \cdot \nu) / 2 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Podsumowując łatwo zauważyć i docenić zwięzłość stosowanego zapisu macierzowego, który pozwala widzieć podstawowy układ równań w następującej postaci:

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon = L \cdot u \\ L^T \cdot \sigma + b = 0 \\ \varepsilon = C \cdot \sigma \text{ lub } \sigma = D \cdot \varepsilon \end{array}} \quad (5.25)$$

5.2. Analiza przybliżona problemu brzegowego

Jak wspomniano wyżej, możliwość znalezienia rozwiązań problemów brzegowych w postaci zamkniętych formuł analitycznych ogranicza się, niestety, do wąskiej klasy zadań. W większości przypadków ważnych z inżynierskiego punktu widzenia, to znaczy dla przypadków znajdujących zastosowania praktyczne, skomplikowane warunki podparcia układów, nietypowe obciążenia czy inne nieregularności uniemożliwiają otrzymanie rozwiązań analitycznych. Chęć otrzymania wartościowych jakościowo i ilościowo wyników opisujących stan układów zmusza do szukania odpowiedzi na drodze dyskretyzacji. Zamiast więc szukać odpowiedzi układu w postaci pól naprężeń, odkształceń i przemieszczeń, poszukuje się wartości tych pól w skończonej liczbie punktów należących do obszaru i jego brzegu. Z punktu widzenia zastosowań aparatu matematycznego w przypadku stosowania dyskretyzacji uwalniamy się od rozwiązywania problemu różniczkowego, zastępując go zadaniem algebraicznym. Nie chcemy w tym miejscu dyskutować o różnych możliwościach stosowania dyskretyzacji, a co za tym idzie, o różnych metodach rozwiązywania problemów brzegowych. Podkreślamy tylko, że omawiana tutaj MES zakłada analizę przybliżoną, polegającą na podziale całego układu na mniejsze części (elementy), posiadające charakterystyczne punkty zwane węzłami, w których to punktach skoncentrowana jest niejako pełna informacja o zachowaniu się tych elementów i ich własnościach. Wspomniane przybliżenie polega - w najbardziej podstawowej wersji - na przyjęciu pola przemieszczeń opisującego przemieszczenie dowolnego punktu elementu, jako funkcji przemieszczeń węzłów i położenia danego punktu (jest to tzw. wersja przemieszczeniowa MES). Niewiadome są więc przemieszczenia węzłów. Musimy być świadomi, że przyjmowane funkcje określające pole przemieszczeń elementu zwykle nie odpowiadają w pełni funkcjom analitycznym rozwiązującym problem różniczkowy. Innymi słowy, popełniamy na tym etapie błędy, które, jak można to udowodnić, maleją w miarę jak rośnie liczba elementów, na które podzielono cały układ. Musimy być także świadomi, że przyjmując pole przemieszczeń w postaci określonych funkcji, deklarujemy tym samym przez związki geometryczne pole odkształceń i dalej przez zależności konstytutywne - pole naprężeń. Jeśli w określonych przypadkach szczególnie zależy nam na w miarę jak najlepszym odwzorowaniu pola odkształceń bądź naprężeń, istnieją inne możliwości przyjęcia funkcji aproksymacyjnych, zakładających wprost te właśnie pola. Takie sformułowania MES nie będą jednak przedmiotem niniejszego opracowania.

Rozważana wersja przemieszczeniowa MES w celu przeanalizowania problemu brzegowego wymaga podjęcia następujących kroków:

- dokonania podziału układu (konstrukcji, kontinuum) na skończoną liczbę pod-obszarów o prostej geometrii,
- wybrania punktów węzłowych (węzłów), w których zostaną zapewnione warunki równowagi i zgodności przemieszczeń,
- założenia funkcji przemieszczeń w obszarach każdego elementu, takiego że przemieszczenia wszystkich punktów zależą od przemieszczeń węzłów,
- spełnienia w elemencie zależności $\varepsilon = L \cdot u$ oraz $\sigma = D \cdot \varepsilon$,
- wyznaczenia sztywności elementów i równoważnych sił węzłowych,
- zbudowania układu równań równowagi dla węzłów zdyskretyzowanego kontinuum,
- rozwiązania układu równań równowagi dla przemieszczeń węzłów,
- obliczenia przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w wybranych punktach elementów,

- obliczenia reakcji podpór.

5.3. Podstawy MES wynikające z równania pracy wirtualnej

Założmy, że trójwymiarowy element skończony jest zdefiniowany w kartezjańskim układzie współrzędnych $[x, y, z]$. Niech wektor u , opisujący przemieszczenie dowolnego punktu elementu, jest wyrażony za pomocą składowych: $u = [u, v, w]^T$, gdzie u, v, w są - odpowiednio - przemieszczeniami w kierunku osi x, y, z . Siły masowe oznaczmy za pomocą wektora $b = [b_x, b_y, b_z]^T$, gdzie składowe oznaczają siły przypadające na jednostkę objętości, powierzchni lub długości. Przez d oznaczmy wektor przemieszczeń węzłowych elementu.. Wymiar tego wektora jest równy liczbie węzłów elementu pomnożonej przez liczbę przyjętych stopni swobody węzła. Jeśli założymy, że przemieszczenia węzła opisują składowe przesunięć w kierunku osi x, y, z oraz jeśli n jest liczbą węzłów w elemencie, to

$$d = [d_i] \quad i = 1, 2, \dots, n_{en}, \quad (5.26)$$

gdzie

$$d_i = [d_{xi}, d_{yi}, d_{zi}] \quad (5.27)$$

Zauważmy tylko, że inne typy przemieszczeń, takie jak obroty czy krzywizny, mogą również być i będą dalej traktowane jako składowe wektora przemieszczeń. Podobnie przyjmijmy siły węzłowe p jako składowe sił we wszystkich węzłach elementu w kierunkach osi x, y i z :

$$p = [p_i] \quad i = 1, 2, \dots, n_{en}, \quad (5.28)$$

gdzie

$$p_i = [p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}] \quad (5.29)$$

Po tych definicjach wstępnych założmy pole przemieszczeń w elemencie jako funkcję przemieszczeń węzłów elementu w postaci:

$$u = N \cdot d \quad (5.30)$$

Ponieważ wektor u ma wymiary (3×1) , zaś wektor przemieszczeń węzłów d wymiary liczby stopni swobody elementu $n_{edf} = n_{en} \times 3$, więc macierz funkcji próbnych, inaczej zwanych funkcjami kształtu, jest macierzą prostokątną o wymiarach $3 \times n_{edf}$. Każda ze składowych macierzy N jest funkcją i określa wpływ

danej składowej wektora przemieszczeń d na przemieszczenie dowolnego punktu elementu o współrzędnych x, y, z .

Zależność $\varepsilon(u)$ otrzymuje się przez różniczkowanie stosownych wyrażeń na przemieszczenia,

$$\varepsilon = L \cdot u \Rightarrow \varepsilon = L \cdot N \cdot d \Rightarrow \varepsilon = B \cdot d \quad (5.31)$$

Macierz B opisuje więc odkształcenia w każdym punkcie elementu, spowodowane jednostkowym przemieszczeniem kolejnych stopni swobody węzłów. Z prawa fizycznego łatwo więc wyprowadzić, że

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \Rightarrow \sigma = D \cdot B \cdot d, \quad (5.32)$$

gdzie iloczyn macierzy $D \cdot B$ opisuje - podobnie jak poprzednio - zmiany naprężeń jako funkcje przemieszczeń węzłów.

Zasada prac wirtualnych głosi, że jeśli układ znajdujący się w równowadze poddany jest wirtualnym przemieszczeniom (kinematycznie zgodnym stanom deformacji), wówczas praca wirtualna zewnętrznych obciążeń jest równa wirtualnej energii odkształcenia naprężeń wewnętrznych:

$$\delta U_e = \delta W_e, \quad (5.33)$$

gdzie U jest wewnętrzną energią odkształcenia, W - pracą sił zewnętrznych, zaś δ oznacza wariację (stan wirtualny - pomyślany, zgodny z więzami).

Wprowadźmy więc wirtualny stan przemieszczeń węzłowych i oznaczmy go przez $\delta d = [\delta d_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n_{en}$). Wirtualne przemieszczenia i odkształcenia można wówczas wyrazić jako

$$\delta u = N \cdot \delta d \quad \text{oraz} \quad \delta \varepsilon = B \cdot \delta d. \quad (5.34)$$

Wirtualna energia układu i praca wirtualna sił zewnętrznych wyrażają się teraz w postaci wzorów:

$$\delta U_e = \int_V \delta \varepsilon^T \cdot \sigma \cdot dV \quad \text{i} \quad \delta W_e = \delta p^T \cdot p + \int_V \delta u^T \cdot b \cdot dV \quad (5.35)$$

kolejno podstawiając otrzymujemy z (5.33)

$$\int_V \delta \varepsilon^T \cdot \sigma \cdot dV = \delta p^T \cdot p + \int_V \delta u^T \cdot b \cdot dV. \quad (5.36)$$

Uwzględniając (5.32) i (5.34), otrzymujemy

$$\delta d^T \int_V B^T \cdot D \cdot \varepsilon \cdot dV = \delta d^T \cdot p + \delta d^T \int_V N^T \cdot b \cdot dV, \quad (5.37)$$

i raz jeszcze wykorzystując (5.34) i upraszczając przez δd^T , otrzymujemy

$$\left(\int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dV \right) \cdot d = p + \int_V N^T \cdot b \cdot dV \quad (5.38)$$

lub ostatecznie

$$K \cdot d = p + p_b, \quad (5.39)$$

gdzie K jest tzw. macierzą sztywności elementu, której składowe mogą być interpretowane jako fikcyjne siły w węzłach, spowodowane jednostkowymi ich przemieszczeniami, p_b zawiera równoważne siły węzłowe spowodowane masą ciała.

Obecność początkowego stanu odkształceń ε_0 można uwzględnić w następujący sposób:

- założyć superpozycję stanów odkształceń

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + C \cdot \sigma, \quad (5.40)$$

- stąd naprężenie

$$\sigma = D \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (5.41)$$

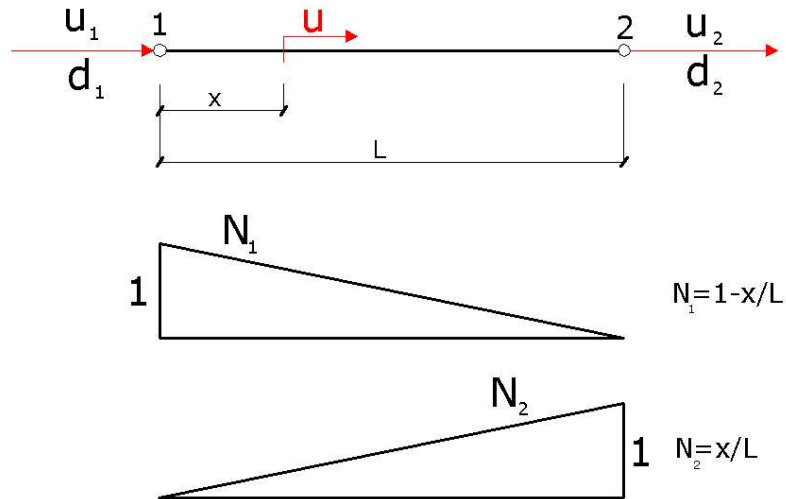
i po podobnych podstawieniach i przekształceniach, jak to uczyniono powyżej, otrzymujemy:

$$K \cdot d = p + p_b + p_0, \quad (5.42)$$

gdzie $p_0 = \int_V B^T \cdot D \cdot \varepsilon_0 \cdot dV$ jest wektorem równoważnym obciążeniom węzłów od początkowego stanu

odkształceń (np. wpływ temperatury). Czytelnik mógłby dla nabrania umiejętności sprawdzić poprawność wyprowadzonego wzoru (5.42).

Prześledźmy na prostym przykładzie pręta (rys. 5.1) postacie opisywanych macierzy oraz sposób dojścia do sformułowania macierzy sztywności prostego elementu. Podkreślmy jednak w tym miejscu, że jak dotąd próbujemy wyłącznie zdefiniować składowe stosownych macierzy i wektorów, odniesione do lokalnego układu współrzędnych i tylko do jednego elementu.



Rys. 5.1. Funkcje kształtu dla dwuwęzłowego elementu kratownicy

Wektor przemieszczenia upraszcza się tutaj do jednej tylko składowej $u = [u_x]$, podobnie zresztą jak wektor sił masowych $b = [b_x]$. Element jest dwuwęzłowy i ma po jednym stopniu swobody w każdym węźle, tak więc globalny wektor przemieszczeń jest tylko dwuelementowy $d = [d_1, d_2] = [u_1, u_2]$. Podobnie rzecz się ma z obciążeniami $p = [p_1, p_2] = [p_{x1}, p_{x2}]$. Przyjmijmy funkcję przemieszczeń w postaci liniowej:

$$u = c_1 + c_2 \cdot x, \quad (5.43)$$

gdzie stałe c_i wyznaczymy z warunków brzegowych

$$\text{dla } x = 0 \quad u = d_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = d_1, \quad (5.44)$$

$$\text{dla } x = L \quad u = d_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = (d_2 - d_1) / L.$$

Przemieszczenie dowolnego punktu wyraża się zatem wzorem

$$u = \left[1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L} \right] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = N \cdot d, \quad (5.45)$$

gdzie macierz funkcji kształtu N składa się z dwóch funkcji liniowych. Przebieg tych funkcji zilustrowano na rysunku 5.1.

Odształcenia dla tego prostego przypadku opisano tylko jedną składową

$$\varepsilon = [\varepsilon_x] = L \cdot u = \frac{du}{dx} = \frac{dN}{dx} \cdot d = B \cdot d \quad (5.46)$$

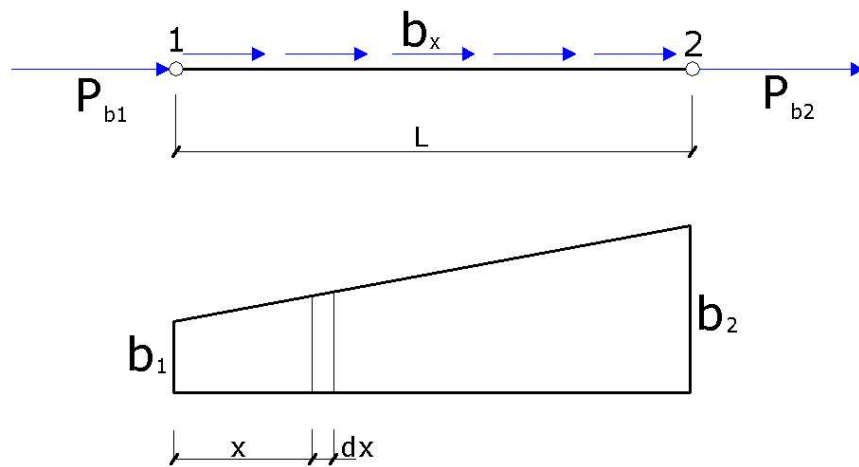
więc

$$B = N_x = \frac{1}{L} \cdot [-1, 1]. \quad (5.47)$$

Stan naprężenia również sprowadza się do jednej tylko składowej:

$$\sigma = \sigma_x = D \cdot \varepsilon = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot B \cdot d, \quad (5.48)$$

gdzie operator konstytutywny uprościł się do jednej tylko stałej.



Rys. 5.2. Obciążenia pręta kratownicy: osiowe ciągłe i liniowo zmienne

Macierz elementu otrzymujemy teraz z podstawienia:

$$K = \int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dV = \frac{E}{L^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [-1 \quad 1] \int_0^L \int_A dA \, dx = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

gdzie przyjęto, że pole powierzchni przekroju pręta jest stałe na całej jego długości.

Przyjmijmy dodatkowo, że pręt obciążony jest siłą masową, zmieniającą się liniowo, tak jak to pokazano na rysunku 5.2 według funkcji:

$$b_x = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{L} \cdot x; \quad (5.50)$$

wówczas wektor sił masowych działających w węzłach wynosi:

$$p_b = \int_0^L N^T \cdot b_x \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot b_1 + b_2 \\ b_1 + 2 \cdot b_2 \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Gdy element poddany jest działaniu temperatury ΔT , mamy do czynienia z początkowymi odkształceniami $\varepsilon_0 = \varepsilon_T = \alpha \cdot (\Delta T)$, gdzie przez α oznaczono współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału. Siły przykładane w węzłach elementu, spowodowane początkowymi odkształceniami, wynoszą:

$$p_0 = p_T = \int_0^L \int_A B^T \cdot D \cdot \alpha \cdot (\Delta T) dA dx = E \cdot A \cdot \alpha \cdot (\Delta T) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Czytelnik mógłby zadać sobie trud sprawdzenia poprawności wyników wzorów (5.51) i (5.52).

5.4. Podstawy MES wyprowadzone z twierdzenia o minimum całkowitej energii potencjalnej

Otrzymane w poprzednim rozdziale równania MES uzyskuje się również przez zastosowanie twierdzenia o minimum całkowitej energii potencjalnej. Twierdzenie to głosi, że spośród wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń spełnia się to, które całkowitej energii potencjalnej zapewnia minimum. Całkowita energia potencjalna układu wyraża się jako:

$$\Pi = U - W, \quad (5.53)$$

gdzie U oznacza energię sprężystą ciała, a W jest pracą sił zewnętrznych. Łatwo wykazać, że Π dla ciała liniowo-sprężystego jest funkcja kwadratowa i ma jedno globalne minimum. Rozwiązanie jest więc jednoznaczne. Energię Π zapiszemy więc w postaci:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \cdot \varepsilon \cdot dV - \int_V u^T \cdot b \cdot dV - \int_S u^T \cdot p^* \cdot dS, \quad (5.54)$$

gdzie p^* jest danym obciążeniem brzegu S . Przyjmując interpolację dla elementu w znanym już nam kształcie:

$$u = N^T \cdot d, \quad \varepsilon = B \cdot d, \quad \sigma = D \cdot \varepsilon,$$

możemy powyższe twierdzenie ograniczyć do obszaru elementu i zapisać:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{V_e} d^T \cdot B^T \cdot D \cdot B \cdot d \cdot dV - \int_{V_e} d^T \cdot N^T \cdot b \cdot dV - \int_{S_\sigma} d^T \cdot N^T \cdot p^* \cdot dS; \quad (5.55)$$

ze stacjonarności tego wyrażenia wynika równowaga elementu:

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{V_e} B^T \cdot D \cdot B \cdot dV \cdot d - p_e = K \cdot d - p_e, \quad (5.56) \text{gdzie } p_e \text{ opisuje siły}$$

węzłowe danego elementu jako efekt obciążeń masowych b i powierzchniowych p^* :

$$p_e = \int_{V_e} N^T \cdot b \cdot dV + \int_{S_\sigma} N^T \cdot p^* \cdot dS. \quad (5.57)$$

Sprawę modyfikacji wyprowadzonych wzorów dla przypadków uwzględniających udział odkształceń wstępnych pozostawia się Czytelnikowi.

Energia sprężysta pojedynczego elementu belkowego bez uwzględnienia wpływu ścinania wynosi:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma^T \cdot \varepsilon \cdot dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \varepsilon^T \cdot D \cdot \varepsilon \cdot dV = \frac{E}{2} \int_{V_e} \varepsilon_x^2 \cdot dV. \quad (5.58)$$

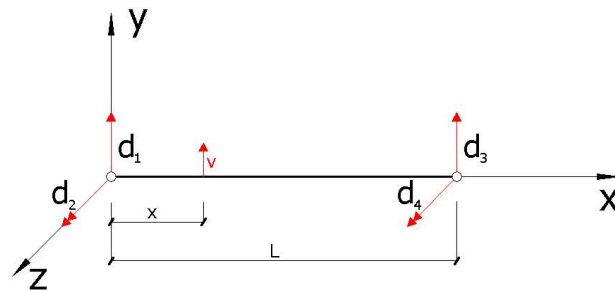
Jeśli przyjmiemy klasyczne założenie belki Bernoulli'ego, że odkształcenie jest funkcją przemieszczenia (ugięcia),

$$\varepsilon_x = -y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad (5.59)$$

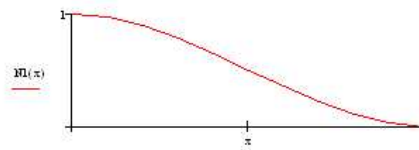
wówczas energia wewnętrzna elementu zginanego wynosi:

$$U_e = \frac{E}{2} \int_{V_e} \left(-y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \cdot dV = \frac{E}{2} \int_{V_e} y^2 \cdot \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \cdot dV = \frac{E}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \iint_A dA \cdot dx = \frac{E \cdot I}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (5.60)$$

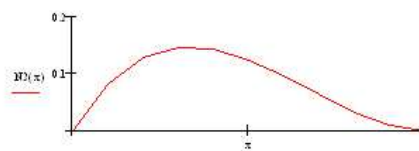
Równanie powyższe interpretuje energię wewnętrzną elementu belkowego jako funkcję przemieszczeń, $v = f(x)$.



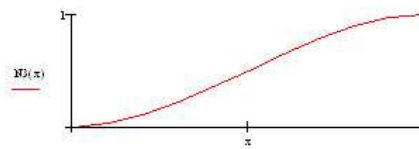
$$N1(x) := \frac{1}{L^3} (2x^3 - 3Lx^2 + L^3)$$



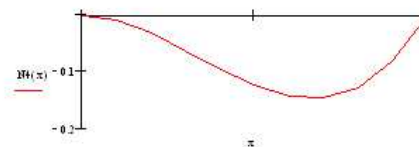
$$N2(x) := \frac{1}{L^3} (Lx^3 - 2L^2x^2 + xL^3)$$



$$N3(x) := \frac{1}{L^3} (-2x^3 + 3Lx^2)$$



$$N4(x) := \frac{1}{L^3} (Lx^3 - L^2x^2)$$



Rys. 5.3. Postacie funkcji kształtu dla elementu belkowego

Rozpatrzmy element belkowy, płaski, dwuwęzłowy zginany w płaszczyźnie xOy , jak na rysunku 5.3. Wektor przemieszczeń węzłowych przyjmijmy w postaci $d = [d_1, d_2, d_3, d_4] = [v_1, \phi_1, v_2, \phi_2]$, gdzie przez v oznaczono przemieszczenie prostopadłe do osi pręta, zaś ϕ jest kątem obrotu przekroju. Indeksy 1,2 odnoszą się do numeracji węzłów. Zgodnie z założeniami klasycznej teorii belek kąty obrotu są pochodnymi przemieszczeń:

$$\phi_1 = \frac{dv_1}{dx}, \quad \phi_2 = \frac{dv_2}{dx}. \quad (5.61)$$

Odpowiedni wektor sił węzłowych $p = [p_1, m_1, p_2, m_2]$ zawiera siły skupione działające w kierunku przemieszczeń oraz momenty zginające zgodne z kątami obrotów przekrojów.

Założmy funkcję przemieszczeń w postaci kompletnego wielomianu trzeciego stopnia:

$$v(x) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot x^3. \quad (5.62)$$

W funkcji tej współczynniki c_i wyznaczmy z warunków brzegowych, które definiują wielkości przemieszczeń i kątów obrotów na końcach elementów jako równe składowym wektora d . Zapiszmy te warunki:

$$\text{dla } x = 0 \quad v(0) = v_1 \quad \text{oraz} \quad \frac{dv(0)}{dx} = \phi_1 \quad (5.63)$$

$$\text{dla } x = l \quad v(l) = v_2 \quad \text{oraz} \quad \frac{dv(l)}{dx} = \phi_2$$

Po wyznaczeniu stałych c_i zapiszemy macierz funkcji kształtu:

$$N = \frac{1}{l^3} \cdot [2 \cdot x^3 - 3 \cdot l \cdot x^2 + l^3, l \cdot x^3 - 2 \cdot l^2 \cdot x^2 + x \cdot l^3, -2 \cdot x^3 + 3 \cdot l \cdot x^2, l \cdot x^3 - l^2 \cdot x^2]. \quad (5.64)$$

Funkcje kształtu, które przedstawiono na rysunku 5.3, opisują zmianę przemieszczenia $v(x)$, spowodowaną jednostkowymi przemieszczeniami węzłów. Jeśli założymy dalej prawdziwość hipotezy płaskich przekrojów, wówczas przemieszczenie podłużne wyniesie:

$$u(x) = -y \cdot \frac{dv}{dx}, \quad (5.65)$$

skąd odkształcenie

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = -y \cdot \kappa, \quad \text{gdzie } \kappa = \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (5.66)$$

Widzimy zatem, że operator różniczkowy L , transformujący przemieszczenie $v(x)$ w odkształcenie ε_x , ma postać:

$$L = -y \cdot \frac{d^2}{dx^2}, \quad (5.67)$$

skąd macierz $B = L \cdot N$ otrzymujemy w postaci:

$$B = L \cdot N = -\frac{y}{l^3} \cdot [12 \cdot x - 6l, 6l \cdot x - 4l^2, -12 \cdot x + 6l, 6l \cdot x - 2l^2]. \quad (5.68)$$

Pamiętając, że dla tego prostego przypadku związek fizyczny ma postać $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$ (czyli operator $D = E$), otrzymujemy macierz sztywności K dla elementu belkowego:

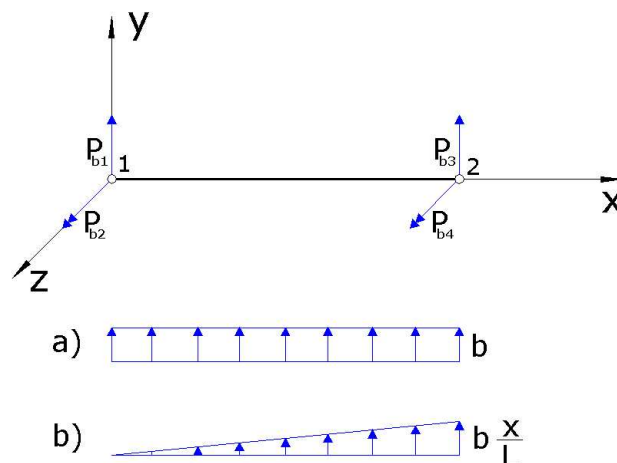
$$K_e = \frac{E \cdot I_z}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 6 \cdot l & -12 & 6 \cdot l \\ 6 \cdot l & 4 \cdot l^2 & -6 \cdot l & 2 \cdot l^2 \\ -12 & -6 \cdot l & 12 & -6 \cdot l \\ 6 \cdot l & 2 \cdot l^2 & -6 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix}, \quad (5.69)$$

gdzie $I_z = \int_A y^2 dA$. Drobne przekształcenia, które należało wykonać, by w końcu otrzymać jawną postać macierzy K_e , pozostawiamy Czytelnikowi.

Równoważne obciążenia węzłowe, wynikające z przyjęcia ciężaru równomiernie rozłożonego b_y bądź liniowo zmieniającego się $b_y(x)$, jak na rysunku 5.4 wynoszą odpowiednio:

$$p_b = \int_0^l N^T \cdot b_y \cdot dx = \frac{b_y \cdot l}{12} \cdot [6, l, 6, -l] \text{ - obciążenie stałe,}$$

$$p_b = \frac{b_y \cdot l}{60} \cdot [9, 2 \cdot l, 21, -3 \cdot l] \text{ - obciążenie liniowo zmienne} \quad (5.70)$$



Rys. 5.4 Obciążenia elementu belkowego: obciążenie równomierne i liniowo zmienne

Chcąc uwzględnić również wpływ odkształceń początkowych założmy, że element poddany jest liniowej zmianie temperatury od ΔT_1 na części dolnej do ΔT_2 na górnej. Jeśli $\Delta T_1 > \Delta T_2$ i wysokość elementu jest równa h , to zmiana temperatury w każdym punkcie wynosi:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \cdot (\Delta T_1 + \Delta T_2) - \frac{y}{h} \cdot (\Delta T_1 - \Delta T_2). \quad (5.71)$$

Pierwszy człon opisuje efekt równomiernego ogrzania, a ponieważ nie wywołuje zginania, zostanie w dalszych rozważaniach pominięty. Drugi człon powoduje odkształcenia od zginania:

$$\varepsilon_{xT} = -\alpha \cdot \frac{y}{h} \cdot (\Delta T_1 - \Delta T_2), \quad (5.72)$$

znajdujemy więc

$$\begin{aligned} p_T &= \int_V B^T \cdot \sigma_T \cdot dV = \\ &= - \int_0^l \int_A B^T \cdot E \cdot \alpha \cdot \frac{y}{h} \cdot (\Delta T_1 - \Delta T_2) \cdot dA dx = \frac{\alpha \cdot E \cdot I_z}{h} \cdot (\Delta T_1 - \Delta T_2) \cdot [0, -l, 0, l] \end{aligned} \quad (5.73)$$

Jeżeli znane są wyrażenia określające krzywizny początkowe κ_0 elementu, to początkowe odkształcenia wyrażają się zależnością:

$$\varepsilon_{x0} = -y \cdot \kappa_0, \quad (5.74)$$

siły węzłowe wyznaczmy zgodnie z (5.42) jako:

$$p_T = \int_V B^T \cdot D \cdot \varepsilon_0 \cdot dV. \quad (5.75)$$

5.5. Podsumowanie

Spróbujmy na koniec tego rozdziału uświadomić sobie, w jaki czysto formalny sposób możemy zbudować macierze sztywności elementów oraz wektory obciążeń, wynikające bądź z działania sił masowych, bądź z wstępnych odkształceń. Zapamiętajmy następujący tok postępowania:

1. Rozpoczynamy od aproksymacji pola przemieszczeń, którą można wyrazić następująco :

$$u = g \cdot c, \quad (5.76)$$

gdzie przez g oznaczyliśmy tzw. macierz geometryczną, która najczęściej gromadzi odpowiednie potęgi stosowanych wielomianów interpolacyjnych, zaś c jest macierzą stałych. Stałe te wyznaczmy z warunków brzegowych, (przemieszczenia w węzłach muszą być zgodne z wartościami przemieszczeń, wynikającymi z przyjętych funkcji)

2. Warunki brzegowe wyrażą się w postaci:

$$d = h \cdot c, \text{ gdzie } h = [g_i] \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n_{edf}. \quad (5.77)$$

Macierz h jest macierzą kwadratową i nieosobliwą, tak więc z układu równań (5.77) można wyznaczyć stałe wielomianów interpolacyjnych jako funkcji przemieszczeń węzłów,

$$c = h^{-1} \cdot d. \quad (5.78)$$

3. Funkcje kształtu otrzymamy teraz automatycznie i formalnie:

$$u = g \cdot h^{-1} \cdot d = N \cdot d, \quad (5.79)$$

więc $N = g \cdot h^{-1}$.

4. Znając postać operatora różniczkowego L , z łatwością wyznaczmy macierz $B = L \cdot N$.

5. Teraz zupełnie formalnie przy ustalonym prawie konstytutywnym $\sigma = D \cdot \varepsilon$ otrzymujemy macierz sztywności K oraz pozostałe wektory p_b , p_0 lub p_T .

Zaproponowany sposób postępowania spróbujemy wykorzystać w dalszych rozważaniach. Należy jednak zaznaczyć, że o ile dla elementów o niewielkiej liczbie stopni swobody taki formalny sposób podejścia jest wygodny, o tyle dla elementów bardziej skomplikowanych może okazać się nieskuteczny. W takich przypadkach wygodniej będzie od razu próbować zdefiniować postacie funkcji kształtu N , a nie uzyskiwać ich w sposób formalny. Ma to miejsce głównie w sytuacjach, gdy unika się budowania jawnej postaci macierzy sztywności elementu, a otrzymuje się ją w wyniku zabiegów numerycznych.

Na koniec rozważań na temat formułowania elementów skończonych podejmiemy próbę odpowiedzi na pytanie, kiedy rozwiązanie równania różniczkowego, opisującego dane zagadnienie brzegowo-początkowe otrzymane za pomocą MES będzie zbiegać się z rozwiązaniem analitycznym (dokładnym). Czy w miarę zwiększania liczby elementów skończonych rozwiązanie to będzie zbliżać się do rozwiązania dokładnego? Zaznaczmy przed rozpatrzeniem tego problemu, że rozwiązania otrzymywane metodą elementów skończonych są obciążone kilkoma typami błędów, wynikającymi z: błędów zaokrąglenia obliczeń komputerowych, błędów wynikających z aproksymacji praw konstytutywnych, błędów powstałych z

całkowania macierzy i błędów metod rozwiązywania równań (sposobu całkowania równań ruchu). Poniżej rozpatrzmy tylko błędy wynikające z dyskretyzacji, czyli idealizacji konstrukcji czy kontinuum materialnego elementami skończonymi.

Można wykazać, że w celu zapewnienia monotonicznej zbieżności rozwiązań elementy skończone muszą spełniać dwa zasadnicze kryteria: zupełności i zgodności. Jeżeli są one spełnione, to dokładność wyników rośnie w miarę zagęszczania siatki podziału na elementy.

Warunek zupełności wymaga, by funkcje przemieszczeń elementu mogły reprezentować jego ruch sztywny (beznaprężeniowy) oraz stan stałych odkształceń. Na przykład dla elementu płaskiego wymagane jest by funkcje przemieszczeń mogły przedstawić 3 postacie ruchu sztywnego (dwa translacyjne i jeden sztywny obrót) oraz stan stałego odkształcenia. Stan stałego odkształcenia można zinterpretować wymaganiami, by w miarę zagęszczania elementów przez ich pomniejszanie, w elementach takich odkształcenia powinny być stałe, by móc skolei reprezentować dowolne zmienny stan odkształcenia całego układu.

Drugie kryterium, tzw. kryterium zgodności elementu, oznacza, że przemieszczenia wewnątrz elementu jak i na jego brzegach powinny być ciągłe. Chodzi o to, by nie pojawiały się nieciągłości pola przemieszczeń pomiędzy elementami w sytuacji, gdy układ elementów zostanie poddany obciążeniu. W przypadku gdy mamy do czynienia tylko z translacyjnymi stopniami swobody wymagane to sprowadza się do sprawdzenia tylko ciągłości przemieszczeń u , v i w . W przypadku występowania rotacyjnych stopni swobody zdefiniowanych jako pochodne przemieszczeń (w elementach belkowych i płytowych), należy spełnić to wymaganie również dla tych stopni swobody, czyli spełnić ciągłość ich pierwszych pochodnych. Ciągłość tę zazwyczaj trudno jest spełnić dla elementów płytowych, w których kąty obrotu są otrzymywane przez różniczkowanie przemieszczeń poprzecznych.

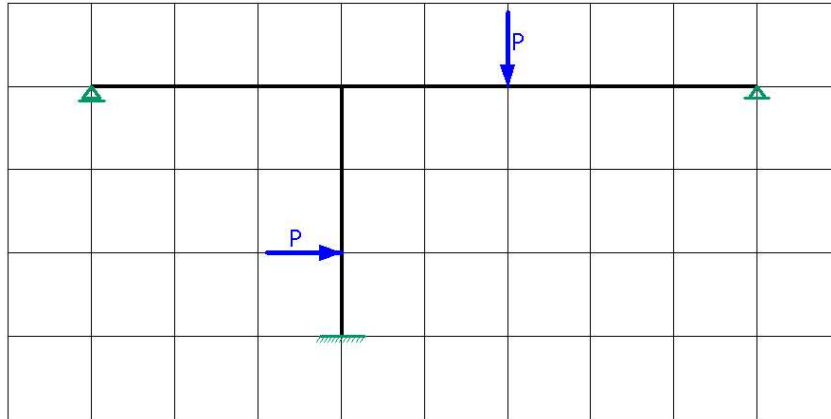
Elementy nie spełniające powyższych kryteriów nazywane są elementami niedostosowanymi a ich stosowanie nie gwarantuje . monotonicznej zbieżności wyników.

To, czy element jest zgodny i zupełny, zależy od użytego sformułowania i każde sformułowanie należy sprawdzić indywidualnie.

Zadania

1. Zapisz funkcjonały całkowitej energii potencjalnej w notacji wskaźnikowej i macierzowej dla ogólnego problemu kontinuum.
2. Podaj wyprowadzenie wzoru na macierz sztywności elementu belkowego z twierdzenia o minimum całkowitej energii potencjalnej.
3. Wyprowadź wzory na postaci macierzy sztywności elementu prętowego (kratownicy) z równania pracy wirtualnej i twierdzenia o minimum całkowitej energii potencjalnej. Jakie są wspólne cechy tego wyprowadzenia?
4. Dana jest rama o geometrii przedstawionej poniżej na rysunku. Pozostałe dane o przekrojach przyjmij z tablicy. Należy :
 - ponumerować węzły i pręty,
 - sformułować macierze połączeń węzłów,

- obliczyć macierze sztywności wybranych elementów w układzie globalnym,
- dokonać agregacji globalnej macierzy sztywności układu,
- zmodyfikować układ równań zgodnie z warunkami brzegowymi.



Rysunek geometrii ramy płaskiej

a	A	A	I	I	E	P
[m]	[cm ²]	[cm ²]	[cm ⁴]	[cm ⁴]	[GPa]	[kN]
1.2	40	22	3000	1000	200	10
2.0	18	28	570	1450	200	12
1.0	240	96	9000	1200	80	6
1.5	240	72	9000	900	100	3