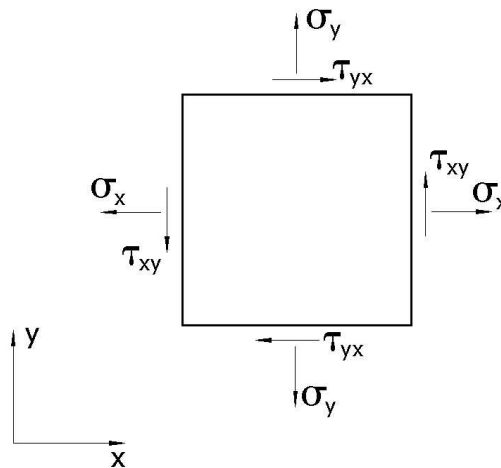


6. PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

6.1. Podsumowanie równań opisujących płaskie stany

Przypomnienie najważniejszych zależności opisujących podstawy liniowej mechaniki ciała stałego dla ogólnego przypadku przestrzennego zawarto w rozdziale 5. Ponieważ wiele technicznie ważnych zagadnień ogranicza się do opisu dwuwymiarowego zestawimy poniżej znane z kursów wytrzymałości materiałów i podstaw liniowej teorii sprężystości podstawowe formuły opisujące równowagę, związki geometryczne i fizyczne, wykorzystywane w zadaniu dwuwymiarowym. Analizując stan naprężenia, posługiwać się będziemy składowymi tensora naprężenia, zapisanymi w postaci wektora:

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]. \quad (6.1)$$



Rys. 6.1. Znakowanie składowych naprężeń

Za dodatnie składowe uznamy te, których zwrot jest zgodny ze zwrotem składowych zaznaczonych na rysunku 6.1.

Wartości składowych naprężenia, odniesione do układu obróconego o kąt α , wyrażone są za pomocą następujących wzorów transformacyjnych:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha, \\ \sigma_{y'} &= \sigma_x \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_y \cdot \cos^2 \alpha - 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha, \\ \tau_{x'y'} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \quad (6.2)$$

lub krócej w postaci macierzowej

$$\sigma' = T_\alpha \cdot \sigma \quad (6.3)$$

gdzie wektory σ' i σ opisują stan naprężenia odniesiony odpowiednio do układu współrzędnych obróconych $(x'0y')$ i wyjściowych $(x0y)$. Macierz transformacji T przyjmuje postać:

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2 \cdot s \cdot c \\ s^2 & c^2 & 2 \cdot s \cdot c \\ -s \cdot c & s \cdot c & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Niekiedy wygodnie jest przedstawić te same zależności transformacyjne, wykorzystując wzory na kąty podwójne. Otrzymujemy wówczas:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \cdot \sin(2\alpha), \\ \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2\alpha) - \tau_{xy} \cdot \sin(2\alpha), \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin(2\alpha) + \tau_{xy} \cdot \cos(2\alpha) \end{aligned} \quad (6.5)$$

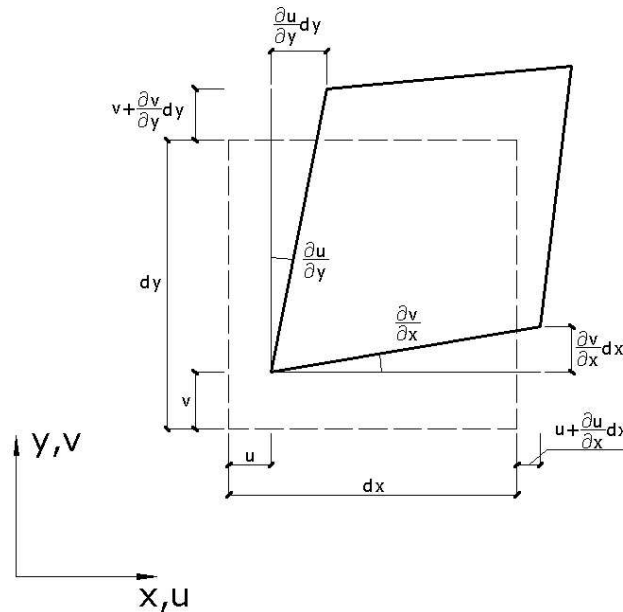
Oczywiście muszą być spełnione znane warunki niezmienniczości:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = const, \\ \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2 &= \sigma_{x'} \cdot \sigma_{y'} - \tau_{x'y'}^2 = const. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Kierunki osi głównych naprężeń i ekstremalne wartości naprężeń głównych otrzymamy, szukając ekstremum (6.5) względem α , co po prostym różniczkowaniu i porównaniu do zera prowadzi do

$$\operatorname{tg}(2\alpha_{gl}) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (6.7)$$

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\max, \min}. \quad (6.8)$$



Rys. 6.2. Przemieszczenia i odkształcenia dla elementu płaskiego

Maksymalne naprężenia ścinające odniesione są do układu współrzędnych, obróconego o $\pi/4$ w stosunku do układu osi głównych i ich wartości wynoszą:

$$\tau'_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.9)$$

Mówiąc o stanie odkształcenia, będziemy się posługiwać wektorem opisującym składowe odniesione do układu (x_0y_0) w postaci:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]. \quad (6.10)$$

Znane zależności geometryczne (związki Cauchy'ego) z zastosowaniem opisu przemieszczeń u i v , odpowiednio w kierunkach osi x i y , wyrażają się teraz w postaci:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6.11)$$

Stosowne zależności między przemieszczeniami, a odkształceniami pokazano na rysunku 6.2. W zapisie macierzowym związku (6.10) można również przedstawić jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}, \quad (6.12)$$

gdzie wektor $u = [u, v]^T$, zaś operator różniczkowy L dla problemu dwuwymiarowego ma postać:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Interesujące są również wartości składowych odkształceń w układzie obróconym $(x'0y')$. Aby je wyznaczyć, porównajmy wyrażenia na energię odkształcenia wyrażoną w układach osi wyjściowym i obróconym. Otrzymujemy następującą sekwencję wzorów:

$$(\delta \sigma')^T \cdot \varepsilon' = (\delta \sigma)^T \cdot \varepsilon,$$

a ponieważ $\delta \sigma' = T_\alpha \cdot \delta \sigma$, więc $(\delta \sigma)^T \cdot T_\alpha^T \cdot \varepsilon' = (\delta \sigma)^T \cdot \varepsilon$,

z czego wynika, że:

$$T_\alpha^T \cdot \varepsilon' = \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \varepsilon' = T_\alpha^{-T} \cdot \varepsilon,$$

gdzie macierz transformacji ma postać:

$$T_\alpha^{-T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & s \cdot c \\ s^2 & c^2 & -s \cdot c \\ -2 \cdot s \cdot c & 2 \cdot s \cdot c & c^2 - s^2 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Podobnie jak poprzednio dla stanu naprężenia można przedstawić wzory na kierunki i wartości głównych odkształceń.

Założmy teraz, że materiał jest izotropowy i wyprowadźmy stosowne wzory opisujące zależności między wektorami stanu naprężenia σ i odkształcenia ε dla przypadków analizy płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia.

Płaski stan naprężenia, występujący w płaszczyźnie $x0y$, charakteryzuje się tym, że następujące składowe tego stanu są równe zeru: $\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, co pociąga za sobą, że również składowe odkształceń są równe zeru: $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ oraz $\varepsilon_z \neq 0$. Odpowiednie zależności przedstawiają się następująco:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x), \quad (6.15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{xy} \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y),$$

lub w postaci odwrotnych relacji:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_x - \nu \cdot \varepsilon_y), \quad \varepsilon_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_y - \nu \cdot \varepsilon_x), \quad (6.16)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma_{xy} = \frac{E \cdot \lambda}{1 - \nu^2} \cdot \gamma_{xy}$$

gdzie stałą λ można wyrazić za pomocą liczby Poissona ν w postaci: $\lambda = \frac{1 - \nu}{2}$

Powyższe zależności można zapisać macierzowe w następujący sposób:

$$\varepsilon = C \cdot \sigma \quad \text{gdzie} \quad C = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \nu) \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

lub odwrotnie

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \quad \text{gdzie} \quad D = C^{-1} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

W płaskim stanie odkształcenia następujące składowe są równe zeru: $\varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$, co powoduje, że odpowiednie składowe stanu naprężenia $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ oraz $\sigma_z \neq 0$. Odpowiednie zależności fizyczne przedstawiają się następująco:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_z), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_z), \quad (6.19)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{xy}$$

oraz

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot (-\nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y + \sigma_z), \quad \text{skąd} \quad \sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y). \quad (6.20)$$

Podstawiając powyższy rezultat do wzorów (6.18), otrzymujemy ostatecznie :

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} \cdot [(1+\nu) \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y], \quad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E} \cdot [(1+\nu) \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_x], \quad (6.21)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy}$$

lub odwracając zależności

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot [(1+\nu) \cdot \varepsilon_x - \nu \cdot \varepsilon_y], \quad \varepsilon_y = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot [(1+\nu) \cdot \varepsilon_y - \nu \cdot \varepsilon_x], \quad (6.22)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \gamma_{xy}.$$

W zapisie macierzowym macierze analogiczne do tych, które występują we wzorach (6.16) i (6.17), mają teraz następującą postać:

$$C = \frac{1+\nu}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

oraz

(6.23)

$$D = C^{-1} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

6.2. Elementy trójkątne płaskiego stanu naprężeń i odkształceń

6.2.1. Trójwęzłowy element o stałych odkształceniach

Jednym z pierwszych elementów służących do opisu dwuwymiarowego kontinuum jest element trójkątny o stałych odkształceniach, w literaturze znany pod skrótową nazwą CST (Constant Strain Triangle). W elemencie tym wyróżnia się trzy węzły (wierzchołki trójkąta), które mają po dwa translacyjne stopnie swobody. Przemieszczenie dowolnego punktu elementu opisane jest w układzie xOy za pomocą dwóch składowych u i v . Kolejne przemieszczenia węzłowe oznaczono przez d_1 do d_6 , odpowiadają one stopniom swobody oznaczonym na rysunku 6.3. Wektor przemieszczeń d , opisujący deformację elementu, składa się zatem z następujących składowych:

$$d = [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6]^T = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3]^T. \quad (6.24)$$

Przyjmijmy funkcje opisujące wielkości przemieszczeń u i v w postaci liniowo zależnej od x i y :

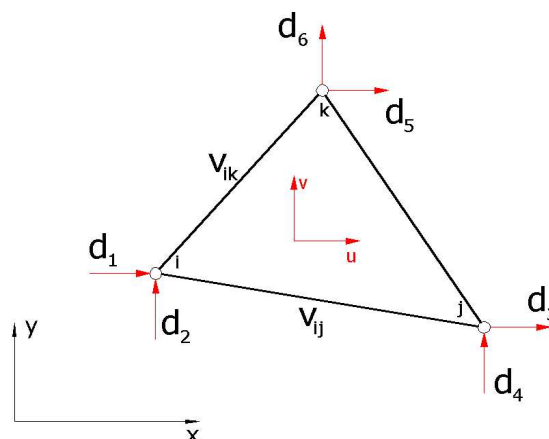
$$u = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y, \quad v = c_4 + c_5 \cdot x + c_6 \cdot y. \quad (6.25)$$

W postaci macierzowej założoną aproksymację zmian wektora przemieszczeń $u = [u, v]^T$ można wyrazić jako:

$$u = g \cdot c, \quad (6.26)$$

gdzie c jest wektorem stałych c_i , jak dotąd nieznanych, zaś tak zwana macierz geometryczna g ma postać:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$



Rys. 6.3. Trójwęzłowy element trójkątny i definicja stopni swobody

Podstawiając warunki brzegowe, to znaczy przyrównując przemieszczenia u i v odpowiednio do przemieszczeń węzłów w punktach i , j , k otrzymujemy macierz h :

$$h = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

która spełnia następujące równanie macierzowe:

$$d = h \cdot c. \quad (6.29)$$

Z równania tego wyznaczmy wartości stałych c_i przez znalezienie macierzy odwrotnej h^{-1} :

$$h^{-1} = \frac{1}{2 \cdot A_{ijk}} \cdot \begin{bmatrix} x_j y_k - x_k y_j & 0 & x_k y_i - x_i y_k & 0 & x_i y_j - x_j y_i & 0 \\ -y_{jk} & 0 & -y_{kj} & 0 & -y_{ij} & 0 \\ x_{jk} & 0 & x_{kj} & 0 & x_{ij} & 0 \\ 0 & x_j y_k - x_k y_j & 0 & x_k y_i - x_i y_k & 0 & x_i y_j - x_j y_i \\ 0 & -y_{jk} & 0 & -y_{ki} & 0 & -y_{ij} \\ 0 & x_{jk} & 0 & x_{ki} & 0 & x_{ij} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

gdzie

$$2 \cdot A_{ijk} = | \text{podwojone pole pow. trój.} | = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = x_{ij} \cdot y_{ik} - x_{ik} \cdot y_{ij}, \quad (6.31)$$

$$x_{ij} = x_j - x_i, \quad y_{ki} = y_i - y_k.$$

Macierz funkcji kształtu N ma więc postać:

$$N = g \cdot h^{-1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

gdzie odpowiednie funkcje wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{2 \cdot A_{ijk}} \cdot (x_j y_k - x_k y_j - y_{jk} \cdot x + x_{jk} \cdot y), \\
N_2 &= \frac{1}{2 \cdot A_{ijk}} \cdot (x_k y_i - x_i y_k - y_{ki} \cdot x + x_{ki} \cdot y), \\
N_3 &= \frac{1}{2 \cdot A_{ijk}} \cdot (x_i y_j - x_j y_i - y_{ij} \cdot x + x_{ij} \cdot y).
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Zależność między przemieszczeniami węzłów d a odkształceniami elementu otrzymamy przez zadziałanie znanym operatorem różniczkowym L na macierz funkcji kształtu N . Otrzymamy wówczas

$$B = L \cdot N = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot N = \frac{1}{2 \cdot A_{ijk}} \begin{bmatrix} -y_{jk} & 0 & -y_{ki} & 0 & -y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{jk} & 0 & x_{ki} & 0 & x_{ij} \\ x_{jk} & -y_{jk} & x_{ki} & -y_{ki} & x_{ij} & -y_{ij} \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = B \cdot d \tag{6.34}$$

Widać, że człony macierzy B nie zależą od położenia x i y i są stałe w obszarze całego elementu. Temu właśnie faktowi element ten zawdzięcza swoją nazwę. Oznacza to, że składowe odkształceń są stałe dla całego elementu, a tym samym na granicy między elementami nie jest zachowany warunek równości odkształceń. Odkształcenia zmieniają się skokowo, zbliżając się jednak do stanu "prawdziwego" w miarę zagęszczania siatki podziału analizowanej przestrzeni dwuwymiarowej.

Zakładając, że mamy do czynienia z materiałem izotropowym, możemy zapisać równanie konstytutywne dla płaskiego stanu naprężeń i (lub) odkształceń, używając operatora $D(\sigma = D \cdot \varepsilon)$ w następującej postaci:

$$D = \frac{E}{(1+\nu) \cdot e_2} \cdot \begin{bmatrix} e_1 & \nu & 0 \\ \nu & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_e \end{bmatrix}, \tag{6.35}$$

gdzie przyjęte stałe e_i wynoszą odpowiednio:

- dla płaskiego stanu naprężeń

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 1 - \nu, \quad e_3 = \frac{e_2}{2}, \tag{6.36}$$

– dla płaskiego stanu odkształceń

$$e_1 = 1 - \nu, \quad e_2 = 1 - 2\nu, \quad e_3 = \frac{e_2}{2}. \quad (6.36)$$

W końcu dokonując znanego już nam całkowania, otrzymujemy wyrazy macierzy sztywności elementu wyrażone w przyjętym układzie współrzędnych x_0y_0 w następującej postaci:

$$K = \int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dV = B^T \cdot D \cdot B \cdot A_{ijk} \cdot t = K_1 + K_2, \quad (6.38)$$

gdzie przez t oznaczono grubość elementu, zaś macierze K_1 i K_2 zawierają wyrazy wywodzące się odpowiednio tylko z odkształceń normalnych i ścinających:

$$K_1 = e_4 \cdot \begin{bmatrix} e_1 y_{jk}^2 & -\nu x_{jk} y_{jk} & e_1 y_{ki} y_{jk} & -\nu x_{ki} y_{jk} & e_1 y_{ij} y_{jk} & -\nu x_{ij} y_{jk} \\ -\nu x_{jk} y_{jk} & e_1 x_{jk}^2 & -\nu y_{ki} x_{jk} & e_1 x_{ki} x_{jk} & -\nu y_{ij} x_{jk} & e_1 x_{ij} x_{jk} \\ e_1 y_{ki} y_{jk} & -\nu y_{ki} x_{jk} & e_1 y_{ki}^2 & -\nu y_{ki} x_{ki} & e_1 y_{ij} y_{ki} & -\nu x_{ij} y_{ki} \\ -\nu x_{ki} y_{jk} & e_1 x_{ki} x_{jk} & -\nu y_{ki} x_{ki} & e_1 x_{ki}^2 & -\nu y_{ij} x_{ki} & e_1 x_{ij} x_{ki} \\ e_1 y_{ij} y_{jk} & -\nu y_{ij} x_{jk} & e_1 y_{ij} y_{ki} & -\nu y_{ij} x_{ki} & e_1 y_{ij}^2 & -\nu x_{ij} y_{ij} \\ -\nu x_{ij} y_{jk} & e_1 x_{ij} x_{jk} & -\nu x_{ij} y_{ki} & e_1 x_{ij} x_{ki} & -\nu x_{ij} y_{ij} & e_1 x_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

$$K_2 = e_4 \cdot \begin{bmatrix} x_{jk}^2 & -x_{jk} y_{jk} & x_{ki} x_{jk} & -x_{jk} y_{ki} & x_{ij} x_{jk} & -y_{ij} x_{jk} \\ -x_{jk} y_{jk} & y_{jk}^2 & -x_{ki} y_{jk} & y_{ki} y_{jk} & -x_{ij} y_{jk} & y_{ij} y_{jk} \\ x_{ki} x_{jk} & -x_{ki} y_{jk} & x_{ki}^2 & -x_{ki} y_{ki} & x_{ij} x_{ki} & -y_{ij} x_{ki} \\ -x_{jk} y_{ki} & y_{ki} y_{jk} & -x_{ki} y_{ki} & y_{ki}^2 & -x_j y_{ki} & -y_j y_{ki} \\ x_{ij} x_{jk} & -x_{ij} y_{jk} & x_{ij} x_{ki} & -x_j y_{ki} & x_{ij}^2 & -x_{ij} y_{ij} \\ -y_{ij} x_{jk} & y_{ij} y_{jk} & -y_{ij} x_{ki} & -y_j y_{ki} & -x_{ij} y_{ij} & y_{ij}^2 \end{bmatrix}.$$

W powyższych wzorach przyjęto oznaczenia:

$$e_4 = \frac{E \cdot t}{4 \cdot A_{ijk} \cdot (1 + \nu) \cdot e_2} \quad \text{oraz} \quad e_5 = e_4 = e_3. \quad (6.40)$$

Zagadnienie wyznaczania odpowiednich sił węzłowych dla tego elementu pozostawiamy Czytelnikowi do samodzielnych rozważań.

6.2.2. Sześciowzłowy element trójkątny o liniowej zmianie odkształceń

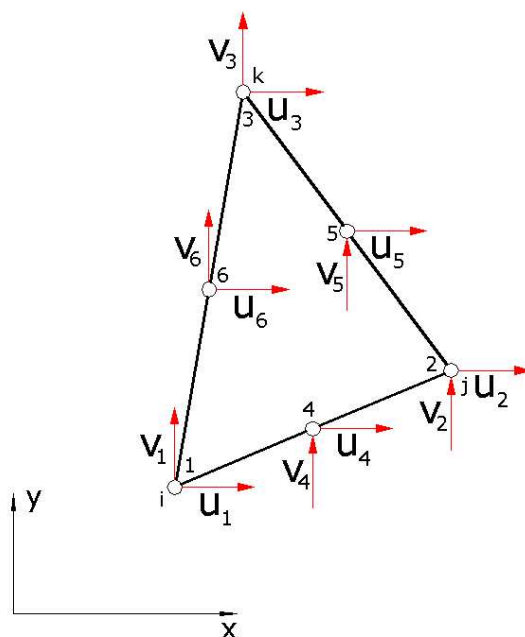
Kolejnym elementem służącym do analizy płaskich stanów naprężeń i odkształceń jest Sześciowzłowy element trójkątny zwany w literaturze skrótowo LST (Linear Strain Triangle) zaproponowany po raz pierwszy przez de Vaubeke. Element ten przedstawiono w lokalnym układzie współrzędnych xOy na rysunku 6.4. Węzły tego elementu umieszczone są w wierzchołkach trójkąta i środkach jego boków. Każdy z węzłów ma, podobnie jak w elemencie CST, po dwa stopnie swobody. Wektor przemieszczeń węzłowych, ma w następujący sposób uporządkowane składowe:

$$d = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6]^T. \quad (6.41)$$

Wektor przemieszczenia dowolnego punktu elementu określony jest za pomocą dwóch elementów: $u = [u, v]^T$, zaś aproksymacja każdej ze składowych przyjęta jest w postaci:

$$\begin{aligned} u &= c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x^2 + c_5 \cdot x \cdot y + c_6 \cdot y^2, \\ v &= c_7 + c_8 \cdot x + c_9 \cdot y + c_{10} \cdot x^2 + c_{11} \cdot x \cdot y + c_{12} \cdot y^2. \end{aligned} \quad (6.42)$$

W wielu przypadkach omówienie poszczególnych typów elementów ogranicza się do sformułowania funkcji aproksymacyjnych, tj. do zdefiniowania postaci funkcji kształtu. Tylko dla nielicznej grupy elementów skończonych podaje się końcowe formuły na wartości współczynników macierzy sztywności elementów. Najczęściej omawiając poszczególne elementy skończone, rozważa się wyłącznie składowe występujące w całce typu (6.38), wyrażone w lokalnym układzie współrzędnych.



Rys. 6.4. Sześciowzłowy element trójkątny

Zwłaszcza przy większej liczbie stopni swobody elementu uzasadnione jest w pełni numeryczne budowanie wyrazów macierzy sztywności, jak również ich transformacja do globalnego układu. Znając ogólne zasady całkowania wyrażenia $B^T \cdot D \cdot B$ oraz zasady transformowania z układu lokalnego do globalnego, ograniczymy się tylko do podania zasadniczych założeń i wyników częściowych. Wszystkich Czytelników zachęcamy do prześledzenia toku rozumowania również przez samodzielne uzupełnienie brakujących ogniw.

Wracając do elementu LST i mówiąc o odkształceniach c będziemy wyróżniać ten stan w trzech punktach węzłowych. Wektor odkształceń c wyrazić można jako funkcję przemieszczeń węzłów w postaci:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x & 0 \\ 0 & B_y \\ B_y & B_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = B \cdot d, \quad (6.43)$$

gdzie poszczególne wektory przedstawiają się następująco:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{x2} \\ \varepsilon_{x3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y = \begin{bmatrix} \varepsilon_{y1} \\ \varepsilon_{y2} \\ \varepsilon_{y3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{xy} = \begin{bmatrix} \gamma_{xy1} \\ \gamma_{xy2} \\ \gamma_{xy3} \end{bmatrix}. \quad (6.44)$$

Stosowne macierze B_i wyrazić można teraz jako

$$B_x = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot y_{32} & -y_{13} & -y_{21} & 4 \cdot y_{13} & 0 & 4 \cdot y_{21} \\ -y_{32} & 3 \cdot y_{31} & -y_{21} & 4 \cdot y_{32} & 4 \cdot y_{21} & 0 \\ -y_{32} & -y_{13} & 3 \cdot y_{21} & 0 & 4 \cdot y_{13} & 4 \cdot y_{32} \end{bmatrix}, \quad (6.45)$$

$$B_y = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot x_{23} & -x_{31} & -x_{12} & 4 \cdot x_{31} & 0 & 4 \cdot x_{12} \\ -x_{23} & 3 \cdot x_{31} & -x_{12} & 4 \cdot x_{23} & 4 \cdot x_{12} & 0 \\ -x_{23} & -x_{31} & 3 \cdot x_{12} & 0 & 4 \cdot x_{31} & 4 \cdot x_{23} \end{bmatrix},$$

gdzie przyjęto podobne oznaczenia jak poprzednio: $x_{ij} = x_i - x_j$ oraz $y_{ij} = y_i - y_j$. W tym przypadku, mimo że macierz sztywności elementu K ma wymiary (12x12) można by zadać sobie trud wyprowadzenia jawnych postaci składowych tej macierzy. Nie uczynimy tego jednak i dalsze możliwe przekształcenia zostawimy zainteresowanym.

6.3. Elementy czworokątne płaskiego stanu naprężeń i odkształceń

6.3.1. Element czworokątny biliniowy

Do rozważania zagadnień dwuwymiarowych o regularnych prostopadłych brzegach wygodne może się okazać stosowanie elementów czworokątnych. Najprostszym elementem tego typu jest zaproponowany przez Melosha biliniowy prostokąt. W tym przypadku łatwiej jest posługiwać się specjalnie wprowadzonym układem współrzędnych bezwymiarowych ξ i η , zdefiniowanym w taki sposób, by współrzędne wierzchołków były równe zawsze ± 1 . Element ten wraz z przyjętym układem współrzędnych jest przedstawiony na rysunku 6.5. W omawianym elemencie przyjęto cztery węzły w wierzchołkach prostokąta a wektor przemieszczeń węzłowych w postaci:

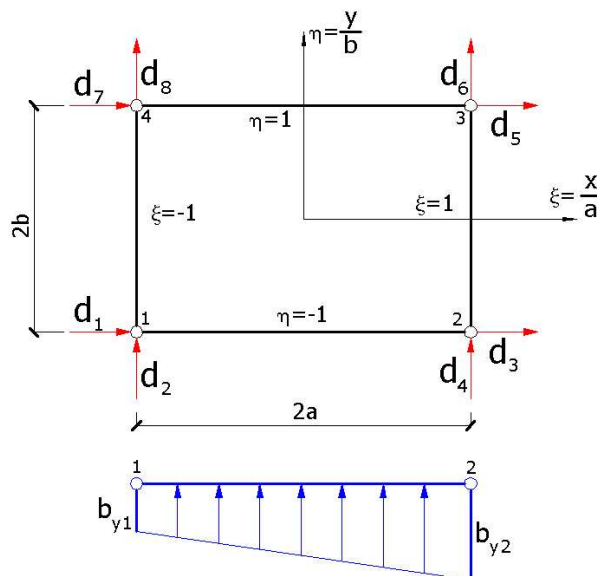
$$d = [d_1, d_2, \dots, d_8]^T = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4]^T. \quad (6.46)$$

Aproksymacja funkcji przemieszczeń ma postać:

$$\begin{aligned} u &= c_1 + c_2 \cdot \xi + c_3 \cdot \eta + c_4 \cdot \xi \cdot \eta, \\ v &= c_5 + c_6 \cdot \xi + c_7 \cdot \eta + c_8 \cdot \xi \cdot \eta. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Macierz geometryczna g wyrażona jest tym razem w postaci:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi \cdot \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi \cdot \eta \end{bmatrix}. \quad (6.48)$$



Rys. 6.5 Czworokątny element biliniowy

Podstawiając współrzędne punktów węzłowych do równań (6.47), otrzymujemy układ ośmiu równań, z których wyznaczymy stałe, a tym samym - postaci funkcji kształtu. Macierz h po podstawieniu współrzędnych węzłów elementu jest wyrażona jako

$$h = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Po określeniu macierzy h^{-1} , co może być osiągnięte w różny sposób, z łatwością wyznaczymy postaci macierzy funkcji kształtu;

$$N = g \cdot h^{-1} = \frac{1}{4} \cdot [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]. \quad (6.50)$$

gdzie poszczególne macierze N_i składają się z następujących funkcji:

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad \text{dla } i=1,2,3,4. \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta), \\ N_2 &= \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta), \\ N_4 &= \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Aby wyznaczyć odkształcenia, musimy zróżniczkować funkcje kształtu N_i względem zmiennych x i y . Ponieważ funkcje te są wyrażone w postaci zależnej od zmiennych bezwymiarowych ξ i η więc zastosujemy w tym miejscu reguły różniczkowania funkcji złożonej:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}.\end{aligned}\tag{6.53}$$

Operator różniczkowy L wyraża się więc w postaci:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{bmatrix}.\tag{6.54}$$

Możemy już teraz wyznaczyć postać macierzy $B = L \cdot N$, która po wykonaniu przepisanych działań wynosi:

$$B = \begin{bmatrix} -b(1-\eta) & 0 & b(1-\eta) & 0 & b(1+\eta) & 0 & -b(1+\eta) & 0 \\ 0 & -a(1-\xi) & 0 & -a(1+\xi) & 0 & a(1+\xi) & 0 & a(1-\xi) \\ -a(1-\xi) & -b(1-\eta) & -a(1+\xi) & b(1-\eta) & a(1+\xi) & b(1+\eta) & a(1-\xi) & -b(1+\eta) \end{bmatrix}\tag{6.55}$$

lub też krócej :

$$B = [B_1, B_2, B_3, B_4],\tag{6.56}$$

gdzie poszczególne macierze B_i przedstawimy w postaci:

$$B_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}, \quad \text{dla } i=1,2,3,4.\tag{6.57}$$

$$\begin{aligned}N_{i,x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{a} \cdot N_{i,\xi}, \\ N_{i,y} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{b} \cdot N_{i,\eta}.\end{aligned}\tag{6.58}$$

Pamiętając, że macierz konstytutywna D może być symbolicznie przedstawiona jako

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}, \quad (6.59)$$

można już bez trudu obliczyć postać macierzy sztywności elementu.

Zastanówmy się jeszcze nad sposobem sprowadzenia do węzłów obciążeń występujących na krawędzi elementu, tak jak to przedstawiono na rysunku 6.5. Wektor składowych obciążenia, zmieniający się liniowo wzdłuż krawędzi, wyrażony jest w następującej postaci (obciążenie działa w kierunku lokalnej osi η):

$$b = \left[\frac{b_{y1} + b_{y2}}{2} + \frac{(b_{y2} - b_{y1})}{2} \cdot \xi \right]. \quad (6.60)$$

W wyniku całkowania wzdłuż brzegu $\eta = -1$ otrzymujemy:

$$p_{bc} = \int_{-1}^{+1} g^T \cdot b \cdot a \cdot d\xi = a \cdot \left[0, 0, 0, 0, b_{y1} + b_{y2}, \frac{b_{y2} - b_{y1}}{3}, -(b_{y1} + b_{y2}), -\frac{b_{y2} - b_{y1}}{3} \right]. \quad (6.61)$$

Mnożąc p_{bc} , przez macierz h^{-T} otrzymujemy końcowe wyrażenia na wielkości sił węzłowych, wynikające z obciążenia brzegu elementu prostokątnego na krawędzi $\eta = -1$ obciążeniem rozłożonym liniowo w następującej postaci:

$$p_b = h^{-T} \cdot p_{bc} = \frac{a}{3} \cdot [0, 2 \cdot b_{y1} + b_{y2}, 0, b_{y1} + b_{y2}, 0, 0, 0, 0]. \quad (6.62)$$

Spróbujmy wyrazić, w jaki sposób w węzłach uwidoczni się efekt działania sił grawitacyjnych w kierunku

ujemnego zwrotu osi y . W tym przypadku siły masowe wynoszą:

$$b = [0, -g_g], \quad (6.63)$$

Całkowanie po objętości (przez t oznaczono grubość elementu) prowadzi do następującej relacji:

$$p_{bc} = a \cdot b \cdot t \cdot \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g^T \cdot b \cdot d\xi d\eta = a \cdot b \cdot t \cdot [0, 0, 0, 0, -4 \cdot b_g, 0, 0, 0] \quad (6.64)$$

oraz

$$p_b = h^{-1} \cdot p_{bc} = -a \cdot b \cdot t \cdot b_g \cdot [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]. \quad (6.65)$$

Efekt działania stałej temperatury ΔT może być opisany za pomocą wektora początkowych odkształceń:

$$\varepsilon_T = [\alpha_1, \alpha_2, 0] \cdot \Delta T \quad (6.66)$$

gdzie przez α_i oznaczono odpowiednio współczynniki rozszerzalności cieplnej w kierunkach osi x i y .

Całkowanie po objętości według poprzednio prezentowanych zasad daje:

$$p_{Tc} = a \cdot b \cdot t \cdot \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_c^T \cdot D \cdot \varepsilon_T d\xi d\eta = 4 \cdot t \cdot \Delta T \cdot [0, d_1, 0, 0, 0, 0, d_2, 0]. \quad (6.67)$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} d_1 &= b \cdot (D_{11} \cdot \alpha_1 + D_{12} \cdot \alpha_2), \\ d_2 &= b \cdot (D_{12} \cdot \alpha_1 + D_{22} \cdot \alpha_2). \end{aligned}$$

końcowym otrzymujemy:

$$p_T = h^{-1} \cdot p_{Tc} = t \cdot \Delta T \cdot [-d_1, -d_2, d_1, -d_2, d_1, d_2, -d_1, d_2]. \quad (6.68)$$

Zauważmy na koniec, że wektor ten opisuje wyłącznie sytuację płaskiego stanu naprężenia. Stosowne wyprowadzenie podobnych formuł dla płaskiego stanu odkształceń pozostawiamy dociekliwemu Czytelnikowi.

Na koniec uwag o tym elemencie prześledźmy jeszcze siły węzłowe, wywołane wstępnym równomiernie rozłożonym odkształceniem ścinającym γ_0 . Wektor opisujący odkształcenia jest wówczas sformułowany następująco:

$$\varepsilon_0 = [0, 0, \gamma_0], \quad (6.69)$$

a odpowiednie siły węzłowe całkowite i rozłożone na węzły wynoszą:

$$\begin{aligned} p_{0c} &= a \cdot b \cdot t \cdot \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_c^T \cdot D \cdot \varepsilon_0 d\xi d\eta = 4 \cdot t \cdot D_{33} \cdot \gamma_0 \cdot [0, 0, a, 0, 0, b, 0, 0], \\ p_0 &= h^{-1} \cdot p_{0c} = t \cdot D_{33} \cdot \gamma_0 \cdot [-a, -b, -a, b, a, b, a, -b] \end{aligned} \quad (6.70)$$

6.3.2. Elementy czworokątne składane z elementów trójkątnych

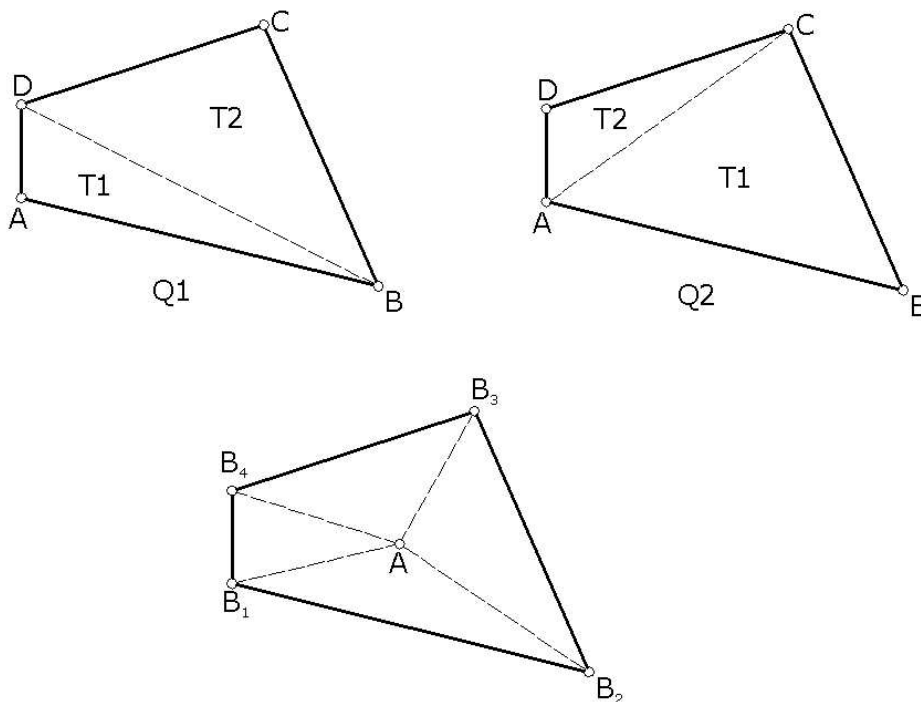
Istnieją różne możliwości generowania macierzy sztywności elementów czworokątnych przez ich składanie z elementów prostszych, na przykład trójkątnych CST. Elementy takie są powszechnie stosowane w programach analizy MES w zagadnieniach dwuwymiarowych. Chcemy w tym miejscu wspomnieć tylko o dwóch możliwościach budowania macierzy sztywności z dwóch bądź czterech elementów trójkątnych. Zasadę tworzenia elementów ilustruje schematycznie rysunek 6.6.

Obszar czworokąta $ABCD$ może być podzielony na dwa trójkąty $T1$ i $T2$ w dwojaki sposób, co pokazano na rysunku 6.6. Każdemu z tych podziałów odpowiada możliwość określenia macierzy sztywności K_{Q_i} . Oczywiście każda z tych macierzy jest inna. Koncepcja budowania macierzy sztywności zakłada pewne uśrednienie. Proces ten ilustrują następujące wzory:

$$K_{Q_i} = K_{T_1} + K_{T_2} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2. \quad (6.71)$$

gdzie i oznacza numer podziału czworokąta na trójkąty, i dalej

$$K_0 = \frac{1}{2} \cdot [K_{Q_1} + K_{Q_2}]. \quad (6.72)$$



Rys. 6.6. Elementy czworokątne tworzone z elementów trójkątnych

Zadanie:

Proszę wyprowadzić wyrażenie na postać macierzy sztywności dla pojedynczego prostokąta o bokach a i b , otrzymane ze złożenia z dwóch trójkątów CST. Wynik proszę porównać z wynikiem elementu czworokątnego biliniowego.

Obszar czworokąta $B_1B_2B_3B_4$ podzielony jest na cztery trójkąty, przy czym dodatkowo wprowadzono węzeł środkowy A . Z łatwością zbudujemy macierz sztywności czworokąta pięciowęzłowego opierając się na macierzach trójkątów. Chcemy jednak posługiwać się wyłącznie stopniami swobody związanymi z zewnętrznymi węzłami. Dokonujemy procesu tzw. kondensacji statycznej w taki sposób, by wyeliminować stopnie swobody związane z węzłem wewnętrznym A . Zapiszmy macierz sztywności tego elementu, dokonując jej podziału na podmacierze związane tylko z węzłami zewnętrznymi (B_i) i z węzłem wewnętrznym (A) w postaci:

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_A \\ d_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_A \\ p_B \end{bmatrix}, \quad (6.73)$$

gdzie macierze K_{AA} i K_{BB} są oczywiście symetryczne, zaś $K_{AB} = K_{BA}^T$, co zapewnia symetrię macierzy sztywności elementu. Zapisane równanie macierzowe możemy teraz rozbić na dwa równania macierzowe w postaci:

$$\begin{aligned} K_{AA} \cdot d_A + K_{AB} \cdot d_B &= p_A, \\ K_{BA} \cdot d_A + K_{BB} \cdot d_B &= p_B. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Mnożąc lewostronnie pierwsze z równań (6.74) przez K_{AA}^{-1} i obliczając d_A po podstawieniu do drugiego równania otrzymujemy:

$$K_{BA} \cdot K_{AA}^{-1} \cdot (p_A - K_{AB} \cdot d_B) + K_{BB} \cdot d_B = p_B \quad (6.75) \text{ i dalej}$$

$$(K_{BB} - K_{BA} \cdot K_{AA}^{-1} \cdot K_{AB}) \cdot d_B = p_B - K_{BA} \cdot K_{AA}^{-1} \cdot p_A \quad (6.76)$$

lub krócej

$$K_{BB}^* \cdot d_B = p_B^*. \quad (6.77)$$

W ten sposób otrzymaliśmy macierz sztywności elementu czworokątnego, która zależy tylko od stopni swobody związanych z jego wierzchołkami.

6.4. Wyjaśnienia końcowe i podsumowanie

Na koniec tego rozdziału podsumujmy w zwarty sposób tok postępowania przyjęty przy definiowaniu macierzy sztywności, uogólnionych sił odpowiadających uogólnionym przemieszczeniom oraz uogólnionych sztywności elementów skończonych dla zagadnień dwuwymiarowych. Najważniejsze kroki proponowanego algorytmu to:

1. założenie funkcji aproksymujących przemieszczenia

$$u = g \cdot c,$$

2. podstawienie warunków brzegowych i wyznaczenie stałych

$$d = h \cdot c, \text{ gdzie } h = [g_i] \text{ dla } i = 1, \dots, n_e \text{ oraz } \det h \neq 0$$

$$c = h^{-1} \cdot d,$$

3. określenie funkcji kształtu

$$u = g \cdot h^{-1} \cdot d = N \cdot d,$$

4. zdefiniowanie odkształceń

$$\varepsilon = L \cdot u = L \cdot N \cdot d = B \cdot d,$$

5. wyznaczenie składowych macierzy sztywności K i wektora p

$$K = \int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dV \text{ oraz } K \cdot d = \int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dV \cdot d = p.$$

Niekiedy przy założonych funkcjach g i ustalonych stałych c pomocne jest przy definiowaniu sił p i macierzy sztywności K sformułowanie opierające się na pojęciach uogólnionych sił, przemieszczeń i sztywności. Przytoczmy na tę okoliczność kilka prostych przekształceń:

$$K \cdot d = \int_V (L \cdot g \cdot h^{-1})^T \cdot D \cdot (L \cdot g \cdot h^{-1}) \cdot dV \cdot d = p,$$

$$K \cdot d = \int_V (B_c \cdot h^{-1})^T \cdot D \cdot (B_c \cdot h^{-1}) \cdot dV \cdot d = p,$$

gdzie $B_c = L \cdot g$

i dalej

$$K \cdot d = h^{-T} \int_V B_c^T \cdot D \cdot B_c \cdot dV \cdot h^{-1} \cdot d = p,$$
$$h^{-T} \cdot K_c \cdot c = p.$$

Mnożąc obie strony przez h^T , otrzymujemy:

$$K_c \cdot c = p_c, \text{ gdzie } p_c = h^T \cdot p;$$

przez p oznaczyliśmy uogólnione siły odpowiadające uogólnionym przemieszczeniom c (stałe ze wzorów aproksymacyjnych), zaś przez K - macierz uogólnionej sztywności.

Zadania

1. Wyprowadź wzory na postacie macierzy sztywności czterowęzłowego elementu kwadratowego korzystając z podziału na elementy trójkątne typu CST. W koniecznym przypadku zastosuj kondensację statyczną. Otrzymane wyniki porównaj ze sobą i macierzą sztywności elementu czworokątnego o liniowych funkcjach kształtu.
2. Ułóż program MES na analizę płaskich stanów, stosując elementy CST. Jawna postać macierzy sztywności tych elementów w lokalnym układzie współrzędnych jest podana w skrypcie.