

## 8. ELEMENTY PŁYTOWE I POWŁOKOWE

Ze względu na szerokie zastosowanie konstrukcji płytowych i powłokowych w budownictwie prace nad formułowaniem coraz to efektywniejszych elementów skończonych płytowo-powłokowych są ciągle kontynuowane. Poniżej przedstawimy tylko niektóre elementy skończone, wykorzystywane do analizy płyt i powłok. Skoncentrujemy naszą uwagę na podstawowych krokach przy formułowaniu takich elementów. Na wstępie przypomnimy równania teorii płyt, by ułatwić Czytelnikowi studiowanie tego rozdziału. Na koniec zaproponujemy pewien sposób analizy powłok za pomocą płaskich elementów tarczowo-płytowych.

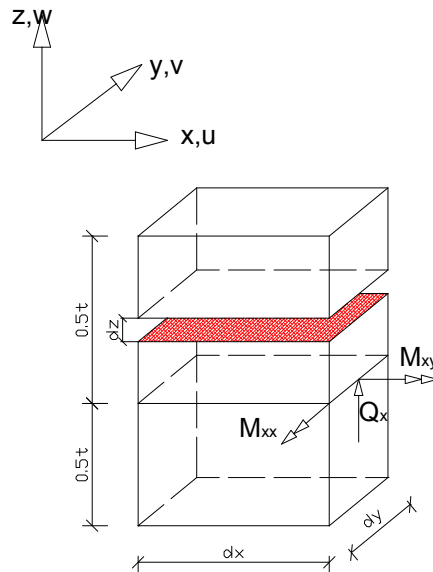
### 8.1. Naprężenia i odkształcenia płyt cienkich (Kirchhoffa)

Płyta cienka jest obiektem dwuwymiarowym, takim że jej wymiary w kierunku osi  $x$  i  $y$  są wielokrotnie większe niż jej grubość. Rysunek 8.1 przedstawia nieskończenie mały element płyty zginanej, dla której płaszczyzna  $xoy$  jest równocześnie płaszczyzną obojętną (neutralną). Wysokość przekroju pokrywa się z pełną grubością płyty  $t$ , podczas gdy inne wymiary wynoszą  $dx$  i  $dy$ . Płyta cienka znajduje się w stanie zginania, gdy obciążenia działają w kierunku normalnym do jej płaszczyzny.

Odkształcenia w płaszczyźnie warstwy płyty są zdefiniowane, jak w płaskim stanie naprężenia, za pomocą równań:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (8.1)$$

Z podstawowego założenia zginania płyt cienkich, według którego normalne do powierzchni obojętnej pozostają proste i normalne w procesie deformacji wynika, że



Rys. 8.1. Elementarny wycinek płyty

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (8.2)$$

skąd po podstawieniu do (8.1) otrzymujemy zależności: odkształcenie – przemieszczenie w postaci

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (8.3)$$

Zależność naprężenie - odkształcenia dla warstwy płyty jest identyczna, jak dla płaskiego stanu naprężenia. Dla materiału izotropowego mamy więc:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \quad (8.4)$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{1-\nu}{2},$$

Dla materiału ortotropowego operator D ma postać:

$$D = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}, \quad (8.5)$$

Wprowadźmy wektor naprężeń uogólnionych, odpowiadających wartościom

momentów zginających, przypadających na jednostkę długości płyty:

$$\mathbf{M} = [M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}]^T \quad (8.6)$$

Jeżeli

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_y), \quad (8.7)$$

to uogólnione naprężenie  $M_{xx}$  wynika z całkowania wyrażenia

$$M_{xx} = - \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \int_{-t/2}^{+t/2} z^2 dz \quad (8.8)$$

Podobnie otrzymamy pozostałe składowe wektora uogólnionych naprężeń:

$$M_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{t^3}{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (8.9)$$

$$M_{xy} = \frac{E t^2}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.10)$$

Przyjmijmy wektor uogólnionych odkształceń  $\Phi$  w postaci:

$$\phi = [\phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{xy}]^T = [w_{xx}, w_{yy}, 2w_{xy}]^T, \quad (8.11)$$

wówczas uogólniony operator dla naprężeń i odkształceń, oznaczony przez  $\mathbf{D}$ , wynosi:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \frac{t^3}{12} \quad (8.12)$$

Otrzymujemy więc relację macierzową:

$$\mathbf{M} = \bar{\mathbf{D}} \phi \quad (8.13)$$

Relacje wynikające z transformacji osi współrzędnych dla wielkości uogólnionych są identyczne z występującymi w płaskim stanie naprężenia. Może to być zademonstrowane przez całkowanie po grubości płyty w postaci następującej sekwencji przekształceń:

$$M' = \int_{-t/2}^{+t/2} -\sigma' z \cdot dz = \int_{-t/2}^{+t/2} -T_\sigma z \cdot dz = \int_{-t/2}^{+t/2} -T_\sigma \cdot D \cdot \varepsilon \cdot z \cdot dz \quad (8.14)$$

ale ponieważ  $\varepsilon = -z\Phi$ , więc dalej:

$$M' = T_\sigma \cdot D \cdot \phi \int_{-t/2}^{+t/2} z^2 \cdot dz = T_\sigma \cdot D \cdot \phi \cdot \frac{t^3}{12} = T_\sigma \cdot M \quad (8.15)$$

Widać więc, że relacja między  $\mathbf{M}'$  i  $\mathbf{M}$  jest taka sama, jak między  $\sigma'$  a  $\sigma$ . By ustalić podobne zależności między  $\Phi'$  a  $\Phi$ , możemy porównać podcałkowe wyrażenia określające wirtualny stan energii odkształcenia. Otrzymamy ciąg przekształceń:

$$\begin{aligned} (\delta M')^T \phi' &= \delta M^T \phi, \\ \delta M^T T_\sigma \phi' &= \delta M^T \phi, \quad \text{gdzie} \quad T_\varepsilon = T_\sigma^{-T}, \\ \phi' &= T_\varepsilon \phi, \end{aligned} \quad (8.16)$$

Można także wykazać, że

$$\bar{D}' = T_\sigma \cdot \bar{D} \cdot T_\sigma^T, \quad (8.17)$$

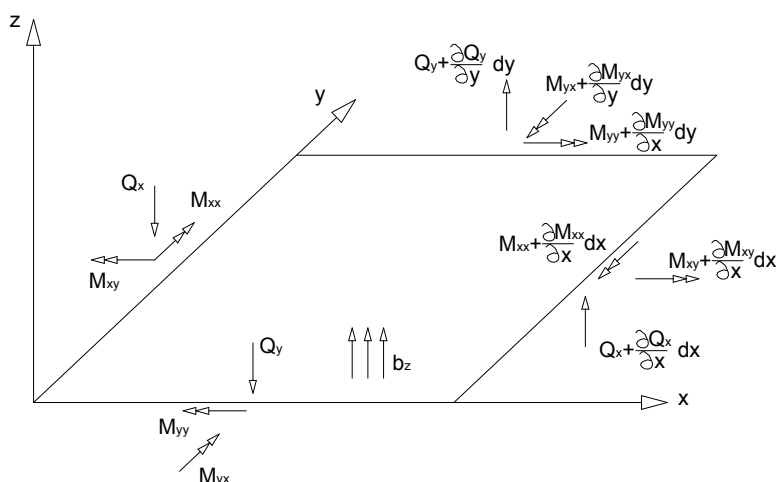
Jeśli rozpatrzmy równowagę wyciętego nieskończenie małego fragmentu płyty (rys. 8.2) z uwzględnieniem sił poprzecznych  $Q_x$  i  $Q_y$  oraz obciążenia  $b_z$ , to otrzymamy:

➤ z równania równowagi  $\sum P_z = 0$ :

$$\begin{aligned} b_z = dx dy - Q_x dy + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy - Q_y dx + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dx = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + b_z = 0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

➤ z równania równowagi  $\sum M_y = 0$  względem osi  $y$  przy pominięciu efektów drugiego rzędu:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + Q_x = 0 \quad (8.19)$$



Rys. 8.2. Definicja sił wewnętrznych

i podobnie z równania równowagi  $\sum M_x = 0$ :

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0 \quad (8.20)$$

Ostatnie dwa równania pozwalają obliczyć siły poprzeczne z pochodnych momentów zginających.

## 8.2. Wybrane elementy płytkowe

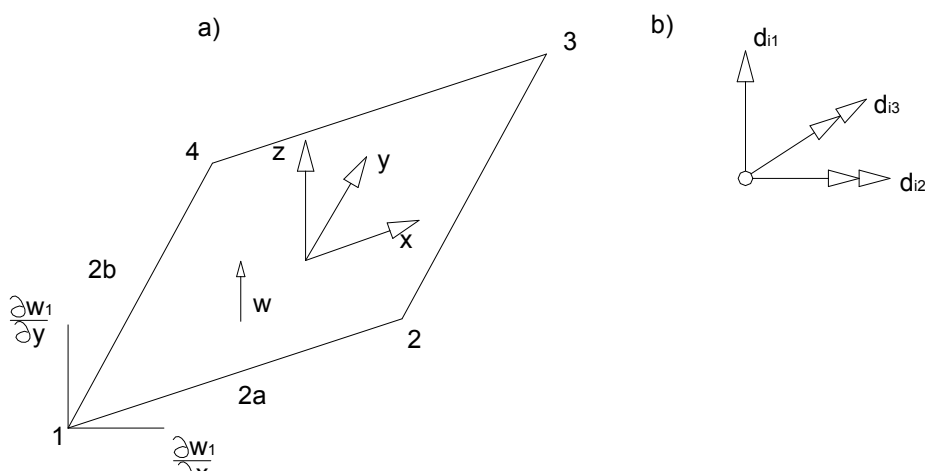
Naszukujemy poniżej podstawowe założenia przyjęte podczas definiowania elementów płytkowych w lokalnym układzie współrzędnych. Pamiętajmy, że przy formułowaniu zadania brzegowego zawsze staniemy przed problemem transformacji współrzędnych macierzy sztywności czy wektora obciążeń z układu lokalnego do globalnego.

### 8.2.1. Niedostosowany element prostokątny

Przedstawimy teraz jeden z najprostszych elementów płytkowych, jakim jest niedostosowany element prostokątny. Element ten, często zwany **MZC** od nazwisk jego twórców (Melosh, Zienkiewicz, Cheung), nie spełnia warunków zgodności pochodnych na brzegach elementu. Jest więc elementem niedostosowanym. Rysunek 8.3 pokazuje przyjętą geometrię elementu oraz definicję stopni swobody węzłów.

W elemencie tym wektor przemieszczeń dowolnego punktu ma tylko jedną składową

$$u = [w]. \quad (8.21)$$



Rys. 8.3. Element płytkowy i definicja stopni swobody

Przyjmijmy trzy stopnie swobody w każdym z czterech węzłów:

$$d_i = [d_{i1} \quad d_{i2} \quad d_{i3}]^T = [w_i \quad \frac{\partial w_i}{\partial y} \quad -\frac{\partial w_i}{\partial x}]^T \quad (8.22)$$

odpowiednie zaś obciążenie węzłowe wynosi:

$$p_i = [p_{i1} \quad p_{i2} \quad p_{i3}]^T = [p_{zi} \quad M_{zi} \quad M_{yi}]^T \quad \text{dla } i=1,2,3,4 \quad (8.23)$$

Funkcję aproksymującą przemieszczenia w przyjęto w postaci

$$w = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \xi + c_3 \cdot \eta + c_4 \cdot \xi^2 + c_5 \cdot \xi\eta + c_6 \cdot \eta^2 + c_7 \cdot \xi^3 + c_8 \cdot \xi\eta + c_9 \cdot \xi\eta^2 + c_{10} \cdot \eta^3 + c_{11} \cdot \xi^3\eta + c_{12} \cdot \xi\eta^3 \quad (8.24)$$

Przypisane funkcje kształtu mają więc postać:

$$N_i = [N_{i1} \quad N_{i2} \quad N_{i3}] \quad (8.25)$$

gdzie :

$$\begin{aligned} N_{i1} &= \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(2+\xi_0+\eta_0-\xi^2-\eta^2), \\ N_{i2} &= \frac{1}{8} \cdot b\eta_i \cdot (1+\xi_0)(1-\eta_0)(1-\eta_0)^2, \\ N_{i3} &= \frac{1}{8} \cdot b\xi_i \cdot (1-\xi_0)(1+\eta_0)(1-\xi_0)^2. \end{aligned} \quad (8.26)$$

gdzie:

$$\xi_0 = \xi_i \cdot \xi, \quad \eta_0 = \eta_i \cdot \eta, \quad \text{dla } i=1,2,3,4$$

Operator  $L$ , wynikający z (8.3), w którym opuszczono człon  $-z$ , ma postać:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

i definiuje macierz  $\mathbf{B}$  w postaci

$$\bar{B}_i = \bar{L}N_i = \begin{bmatrix} N_{i1,xx} & N_{i2,xx} & N_{i3,xx} \\ N_{i1,yy} & N_{i2,yy} & N_{i3,yy} \\ N_{i1,xy} & N_{i2,xy} & N_{i3,xy} \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

W szczególności dla węzła pierwszego macierz  $\mathbf{H}$  wynosi

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{4a^2b^2} = \begin{bmatrix} 3\xi(1-\eta)b^2 & 0 & (1-3\xi)(1-\eta)ab^2 \\ 3(1-\xi)\eta a^2 & -(1-\xi)(1-3\eta)ba^2 & 0 \\ (4-3\xi^2-3\eta^2)ab & (1-\eta)(1+3\eta)ab^2 & -(1-\xi)(1+3\eta)ba^2 \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

Uogólnione naprężenia wynoszą więc

$$M = \bar{D}\phi = \bar{D} \cdot \bar{B} \cdot d \quad (8.30)$$

Dla materiałów izotropowych iloczyn  $\mathbf{D} \mathbf{B}$  jest macierzą prostokątną o wymiarze 3x12.

Fragment tej macierzy (pierwsza kolumna) jest następujący:

$$\bar{D}\bar{B} = \frac{Et^3}{48a^2b^2(1-\nu^2)} = \begin{bmatrix} 3\xi(1-\eta)b^2 + 3\nu(1-\xi)\eta a^2 \dots \\ 3\nu\xi(1-\eta)b^2 + 3(1-\xi)\eta a^2 \dots \\ \lambda(4-3\xi^2-3\eta^2)ab \dots \end{bmatrix}_{(3 \times 2)} \quad (8.31)$$

Macierz sztywności elementu skończonego w układzie lokalnym otrzymamy z

$$K_e = \int_A \bar{B}^T \bar{D} \cdot \bar{B} \cdot dA = ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{B}^T \cdot \bar{D} \cdot \bar{B} \cdot d\xi d\eta \quad (8.32)$$

a równoważne obciążenia węzłowe od obciążeń lub początkowych odkształceń wyrażone są w postaci :





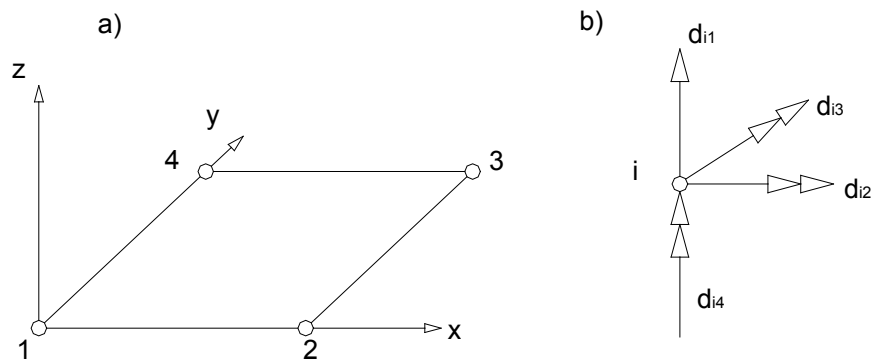
$$\begin{aligned}
 Q_x &= -\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \\
 Q_y &= -\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{8.37}$$

### 8.2.2. Dostosowany element prostokątny

Element ten zwany jest często **BFS** od pierwszych liter nazwisk autorów (Bogner, Fox, Schmit). Ten czterowęzłowy element ma cztery stopnie swobody w każdym węzle:

$$\mathbf{d}_i = [d_{i1} \quad d_{i2} \quad d_{i3}]^T = [w_i \quad \frac{\partial w_i}{\partial y} - \frac{\partial w_i}{\partial x} \quad -\frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y}]^T
 \tag{8.38}$$

Rysunek 8.4 przedstawia przyjęte oznaczenia oraz stopnie swobody węzła i.



Rys. 8.4. Czworokątny dostosowany element płytkowy

Przyjęte siły węzłowe określa wektor  $\mathbf{p}_i$  :

$$\mathbf{p}_i = [p_{zi} \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad X_{xyi}]^T
 \tag{8.39}$$

gdzie  $X_{xyi}$  . jest uogólnioną reakcją (drugi moment siły) odpowiadającą uogólnionemu przemieszczeniu  $w_{i,xy}$ . Tym samym funkcja przemieszczeń wybrana została zwielomianu szesnasto składnikowego w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
w = & C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 \\
& + C_5y + C_6xy + C_7x^2y + C_8x^3y \\
& + C_9y^2 + C_{10}xy^2 + C_{11}x^2y^2 + C_{12}x^3y^2 \\
& + C_{13}y^3 + C_{14}xy^3 + C_{15}x^2y^3 + C_{16}x^3y^3
\end{aligned} \tag{8.40}$$

Przyjęta funkcja jest zupełną dziesięć składnikową funkcją, zawierającą wyrażenia 3 stopnia (nad linią przerywaną), uzupełnioną sześcioma składnikami pod tą linią. W tabelicy 8.1 przedstawiono zestawienie funkcji kształtu odpowiadających wszystkim szesnastu stopniom swobody tego elementu.

Dalsze rozważania przebiegają podobnie jak w rozdziale poprzednim, dotyczącym elementu niedostosowanego.

Tablica 8.1 Funkcje kształtu dla elementu BFS

J	$N_j$	j	$N_j$
1	$(1-3\xi^2+2\xi^3)(1-3\eta^2+2\eta^3)$	9	$(3\xi^2-2\xi^3)(3\eta^2-2\eta^3)$
2	$(1-3\xi^2+2\xi^3)(\eta-2\eta^2+\eta^3)b$	10	$-(3\xi^2-2\xi^3)(\eta^2-\eta^3)b$
3	$-(\xi-2\xi^2+\xi^3)(1-3\eta^2+2\eta^3)a$	11	$-(\xi^2-\xi^3)(3\eta^2-2\eta^3)a$
4	$(\xi-2\xi^2+\xi^3)(\eta-2\eta^2+\eta^3)ab$	12	$-(\xi^2-\xi^3)(\eta^2-\eta^3)ab$
5	$(3\xi^2-2\xi^3)(1-3\eta^2+2\eta^3)$	13	$(1-3\xi^2+2\xi^3)(3\eta^2-2\eta^3)$
6	$(3\xi^2-2\xi^3)(\eta-2\eta^2+\eta^3)b$	14	$-(1-3\xi^2+2\xi^3)(\eta^2-\eta^3)b$
7	$(\xi^2-\xi^3)(1-3\eta^2+2\eta^3)a$	15	$-(\xi-2\xi^2+\xi^3)(3\eta^2-2\eta^3)a$
8	$-(3\xi^2-\xi^3)(\eta-2\eta^2+\eta^3)ab$	16	$-(\xi-2\xi^2+\xi^3)(\eta^2-\eta^3)ab$

Element BFS charakteryzuje się lepszą zbieżnością w obliczeniach płyt cienkich niż niedostosowany element MZC. Ponadto zastosowane w nim wielomiany wyższego stopnia w funkcjach kształtu umożliwiają paraboliczny rozkład sił wewnętrznych (momentów). Zauważmy jednak, że wprowadzony w nim stopień swobody jako druga mieszana pochodna funkcji ugięcia powoduje pewne ograniczenia jego zastosowań. Wymagana jest bowiem ciągłość tego parametru, co w przypadku płyt o skokowo zmiennej grubości nie może być spełnione i element ten nie nadaje się do tego typu zagadnień.

### 8.2.3. Element trójkątny

Na koniec tego krótkiego przeglądu elementów płytowych wspomnijmy jeszcze o elemencie trójkątnym **CKZ** (Cheung, King, Zienkiewicz). Przyjmuje się w nim trzy węzły i po trzy uogólnione przemieszczenia w każdym z tych węzłów (rys. 8.5). Stopnie swobody węzła są następujące:

$$\mathbf{d}_i = [d_{i1} \quad d_{i2} \quad d_{i3}]^T = [w_i \quad \frac{\partial w_i}{\partial y} \quad -\frac{\partial w_i}{\partial x}]^T, \quad \text{dla } i=1,2,3 \quad (8.41)$$

W tabelicy 8.2 zestawiono założone funkcje kształtu. Funkcje te wyraża się we współrzędnych naturalnych (polowych).

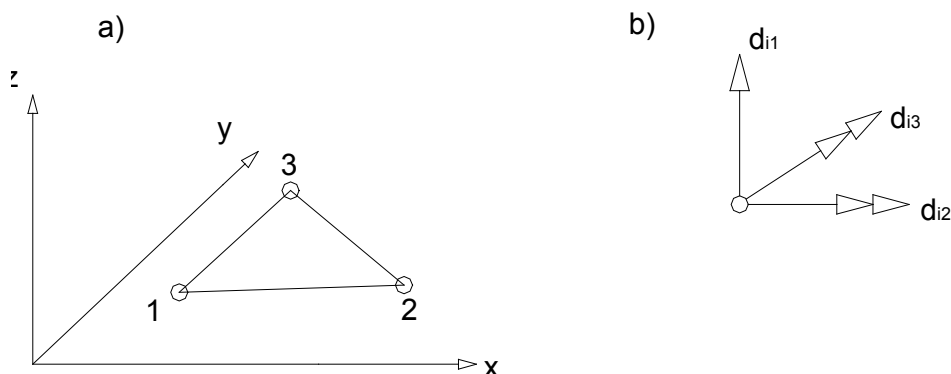
Tablica 8.2 Funkcje kształtu dla elementu trójkątnego CKZ

j	$N_j$
1	$\xi_1 + \xi_1^2 \xi_2 + \xi_1^2 \xi_3 - \xi_1 \xi_2^2 - \xi_1 \xi_3^2$
2	$b_3(\xi_1^2 \xi_2 + \alpha) - b_2(\xi_3 \xi_1^2 + \alpha)$
3	$a_3(\xi_1^2 \xi_2 + \alpha) - a_2(\xi_3 \xi_1^2 + \alpha)$
4	$\xi_2 + \xi_2^2 \xi_3 + \xi_2^2 \xi_1 - \xi_2 \xi_3^2 - \xi_2 \xi_1^2$
5	$b_1(\xi_2^2 \xi_3 + \alpha) - b_3(\xi_1 \xi_2^2 + \alpha)$
6	$a_1(\xi_2^2 \xi_3 + \alpha) - a_3(\xi_1 \xi_2^2 + \alpha)$
7	$\xi_3 + \xi_3^2 \xi_1 + \xi_3^2 \xi_2 - \xi_3 \xi_1^2 - \xi_3 \xi_2^2$
8	$b_2(\xi_3^2 \xi_1 + \alpha) - b_1(\xi_2 \xi_3^2 + \alpha)$
9	$a_2(\xi_3^2 \xi_1 + \alpha) - a_1(\xi_2 \xi_3^2 + \alpha)$

Gdzie oznaczono  $\alpha = \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{2}$ ,  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}_{23}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{x}_{31}$ ,  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{x}_{12}$ ,

$$\mathbf{b}_1 = -y_{23}, \mathbf{b}_2 = -y_{31}, \mathbf{b}_3 = -y_{12},$$

Rys. 8.5. Trójkątny element płytowy

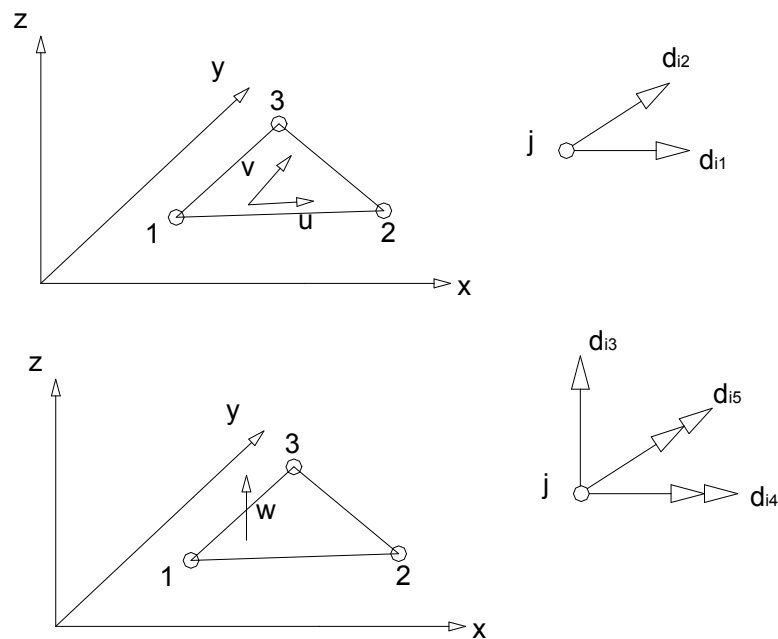


Aby obliczyć współczynniki macierzy  $\mathbf{B}$ , należy zróżniczkować wyrażenia na  $N_i$  z powyższej tablicy. Odpowiedni operator różniczkowy  $\mathbf{L}$  ma znaną już postać (8.27). Informacje na temat całkowania numerycznego po powierzchni trójkąta (wybór punktów próbnych i wag kwadratur Gaussa) można znaleźć w Dodatku B.

### 8.3. Element trójkątny powłokowy

Zamiast rozważań nad klasycznymi teoriami powłok cienkich spróbujemy uprościć rozumowanie i analizować dowolne powłoki za pomocą elementów przedstawionych wyżej i w poprzednich rozdziałach. Przybliżając powłokę przenoszącą zarówno zginanie, jak i siły membranowe za pomocą płaskich elementów trójkątnych, możemy posłużyć się superpozycją znanych już elementów: płaskiego **CST** i płytowego **CKZ**. Składowe membranowe i składowe pochodzące od zginania dla obu elementów zaznaczono na rysunku 8.6. Przyjmując tę kombinację w każdym węźle mamy pięć stopni swobody w lokalnym układzie współrzędnych. Rysunek 8.7 przed stawia podział powierzchni powłoki na płaskie elementy trójkątne oraz definiuje przemieszczenia wyrażone w lokalnym i globalnym układzie współrzędnych. Zauważmy, że w globalnym układzie w każdym węźle mamy po sześć stopni swobody (z tego faktu wynikają pewne komplikacje, które omówimy dalej). Zanim więc dokonamy agregacji elementów trójkątnych (rys.8.7), musimy dokonać transformacji składowych macierzy, wyrażając je w globalnym układzie XYZ. Prawo transformacji dla składowych w węźle  $i$  ma postać

$$\mathbf{d}_i' = \hat{\mathbf{R}}_i \mathbf{d}_i \quad (i=1,2,3) \quad (8.42)$$



Rys. 8.6. Trójkątny element powłokowy jako złożenie elementu płaskiego i płytowego

Wektor  $\mathbf{d}'_i$ , ma pięć składowych i wyraża przemieszczenia węzła  $i$  w układzie lokalnym:

$$\mathbf{d}'_i = [d'_{i1} \ d'_{i2} \ d'_{i3} \ d'_{i4} \ d'_{i5}] \quad (8.43)$$

zaś  $\mathbf{d}_i$  ma ich sześć i są one wyrażone w układzie globalnym w następująco:

$$\mathbf{d}_i = [d_{i1} \ d_{i2} \ d_{i3} \ d_{i4} \ d_{i5}] \quad (8.44)$$

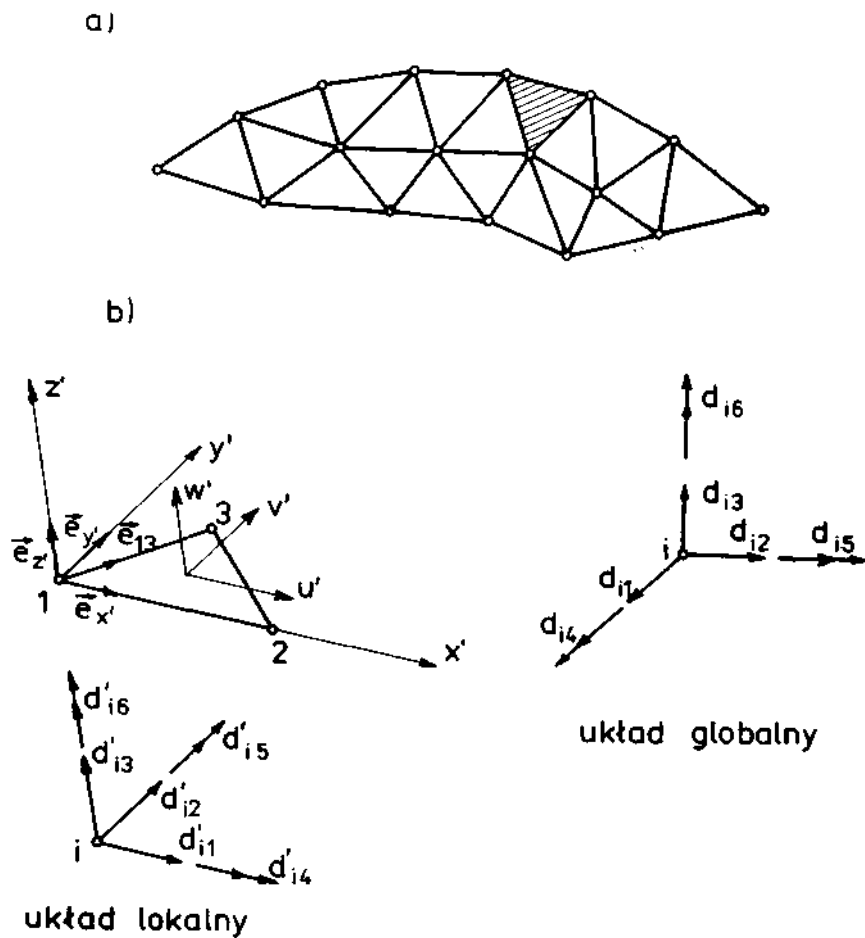
Widzimy więc, że macierz transformacji  $\mathbf{R}_i$  o wymiarach 5x6 musi mieć następującą postać:

$$\hat{\mathbf{R}}_i = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \end{bmatrix}_{(5 \times 6)} \quad (8.45)$$

Macierz ta zawiera cosinusy kierunkowe osi lokalnych (pionowych) w układzie globalnym. Znając współrzędne węzłów 1 i 2, umiemy określić składowe wektora jednostkowego  $\mathbf{e}'_x$  w układzie globalnym jako:

$$\lambda_{11} = \frac{x_{12}}{L_{12}}, \quad \lambda_{12} = \frac{y_{12}}{L_{12}}, \quad \lambda_{13} = \frac{z_{12}}{L_{12}}, \quad (8.46)$$

Podobnie współrzędne punktów 1 i 3 umożliwiają wyznaczenie wektora jednostkowego  $\mathbf{e}'_{13}$  (rys.8.7b), określonego w kierunku brzegu 1-3



Rys. 8.7. Układy współrzędnych: lokalny i globalny

$$C_{x13} = \frac{x_{13}}{L_{13}}, \quad C_{y13} = \frac{y_{13}}{L_{13}}, \quad C_{z13} = \frac{z_{13}}{L_{13}}, \quad (8.47)$$

Współrzędne wektora jednostkowego w kierunku prostopadłym do płaszczyzny trójkąta, czyli w kierunku osi  $z'$  ( $e_{z'}$ ), są określane jako wynik unormowanego iloczynu wektorowego:

$$e_{z'} = \frac{e_x \times e_{13}}{\sin \theta}, \quad (8.48)$$

co określa nam składowe  $\lambda_{31}$ ,  $\lambda_{32}$ ,  $\lambda_{33}$ . Wreszcie składowe wektora jednostkowego  $e_y$ , otrzymujemy jako

$$\mathbf{e}_y' = \mathbf{e}_z, \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_x', \quad (8.49)$$

co z kolei określa  $\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}$ . Podobnie macierz transformacji  $\mathbf{R}_i$  służy do wyrażenia składowych obciążeń w układzie globalnym  $p_i$  jako funkcji składowych lokalnych  $p_i'$ .

$$\mathbf{p}_i = \hat{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{p}_i' \quad (8.50)$$

Taka podmacierz sztywności elementu  $K'_{ij}$  jest transformowana według następującego prawa:

$$\mathbf{K}_{ij} = \hat{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{K}'_{ij} \hat{\mathbf{R}}_j, \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3 \quad (8.51)$$

Przekształcenie to buduje w układzie globalnym macierz sztywności (6x6) z macierzy (5x5).

Przedstawiony wyżej sposób analizy powłok za pomocą elementów płaskich ma jednak pewne niedogodności. Przede wszystkim należy podkreślić, że aproksymacja geometrii powierzchni zakrzywionych elementami płaskimi nigdy nie może być zadowalająca, nawet gdy zastosujemy bardzo gęsty podział na elementy. Sformułowanie to ma jeszcze inną niedogodność, co wcześniej sygnalizowaliśmy. Zauważmy bowiem, że macierze sztywności membranowej i zgięciowej są budowane w lokalnym układzie współrzędnych elementu, pokrywającym się z jego płaszczyzną. W układzie tym nie następuje sprzężenie obu stanów, ponieważ każdy z nich opisywany jest przez inne stopnie swobody. Przed agregacją macierze te są transformowane do układu globalnego. Macierz sztywności w układzie tym ma wymiar  $6n \times 6n$ , gdzie  $n$  jest liczbą węzłów elementu. Jeżeli sąsiednie elementy (przylegające do siebie) leżą w jednej płaszczyźnie, to macierz taka jest osobliwa. Jeżeli elementy sąsiednie tworzyć będą bardzo mały kąt (jak np. mało wyniosłe przekrycia powłokowe), to macierz układu będzie źle uwarunkowana. Pojawienie się osobliwości macierzy sztywności lub jej źle uwarunkowanie prowadzi oczywiście do trudności w rozwiązywaniu układu równań. W celu usunięcia osobliwości lub poprawienia uwarunkowania macierzy stosuje się szereg technik. Poniżej omówimy jeden z takich sposobów, który jest łatwy do implementacji komputerowej. W miejscu na głównej przekątnej, gdzie współczynnik sztywności jest równy zero (lub jest bardzo mały), wpisuje się fikcyjną sztywność skręcania  $\mathbf{K}_\Phi$ . W ten sposób otrzymujemy równanie typu  $\mathbf{K}_\Phi \cdot \theta_z = 0$ . Wartość  $\mathbf{K}_\Phi$  musi być na tyle duża, by nie pojawiły się wspomniane trudności, a przy tym na tyle mała, by nie wpłynęła na pozostałe wyniki. W programach komputerowych wykorzystujących płaskie elementy powłokowe przyjmuje się często fikcyjne współczynniki sztywności skręcania we wszystkich elementach, niezależnie od tego, czy są one koplanarne, czy też nie, lub wymaga się od użytkownika programu, by wskazał w danych

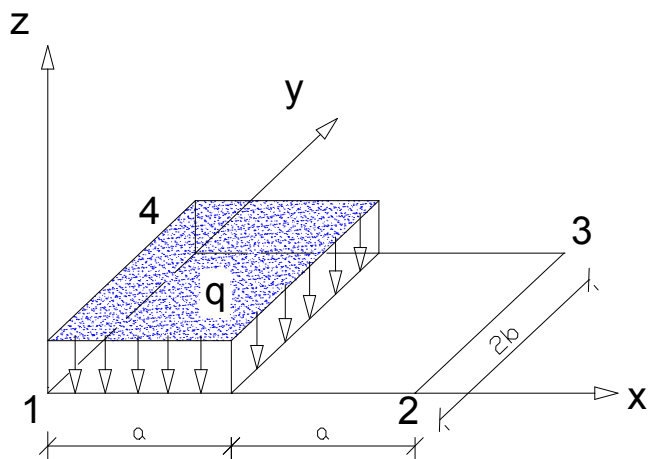
te węzły, w których należy te współczynniki umieścić.

Pomimo trudności stosowania tych elementów do analizy konstrukcji powłokowych elementy te są nadal często wykorzystywane i w wielu praktycznych zagadnieniach dają wyniki obciążone małymi błędami.

Zwracamy jednak uwagę Czytelnika na konieczność ostrożnego posługiwania się płaskimi elementami w analizie powłok małowyniosłych lub w analizie fragmentów konstrukcji leżących w jednej płaszczyźnie.

### Zadania

1. Wyznaczyć współczynniki macierzy we wzorze (8.33).
2. Dla elementu MZC wyznaczyć odpowiednie równoważne siły węzłowe w punkcie 1 od obciążenia elementu przedstawionego na rysunku poniżej.



3. Wykonać zadanie 2 dla siły skupionej  $P$  przyłożonej w połowie boku 2-3.
4. Obliczyć  $K_{12}$  dla elementu MZC.
5. Dla elementu BFS obliczyć równoważne siły węzłowe w punkcie 3.

