

9. WYBRANE ZAGADNIENIA DYNAMIKI KONSTRUKCJI

W rozdziale 5 wyprowadziliśmy równanie równowagi statycznej dla ciała analizowanego metodą elementów skończonych. Równanie to można również zinterpretować jako równanie ruchu ciała, zapisane w pewnej chwili t przy pominięciu sił bezwładności. Prawa strona tego równania może bowiem zależeć od czasu i może być ustalona dla tej chwili. Przemieszczenia układu zależeć będą wówczas także od czasu. Dla większości przypadków, w których zachodzi potrzeba uwzględnienia obciążeń zmiennych w czasie, konieczne jest uwzględnienie sił bezwładności w równaniach równowagi. Otrzymujemy wówczas problem dynamiczny. Poniżej sformułujemy problem dynamiki ciał sprężystych, dyskretyzowanych elementami skończonymi. Wykorzystując zasadę d'Alemberta, w równaniu równowagi statycznej uwzględnia się siły bezwładności jako część sił masowych. Jeżeli przyspieszenia elementów będą aproksymowane w ten sam sposób co przemieszczenia elementów, wówczas wektor sił zewnętrznych możemy zmodyfikować do postaci

$$\mathbf{R}_B = \sum_e \int N_e^T [f_e^b - \rho_e N_e \ddot{d}_e] dV_e, \quad (9.1)$$

gdzie w wektorze sił masowych f nie uwzględniono sił bezwładności. Wektor d_e jest wektorem przyspieszeń punktów węzłowych elementu e , zaś ρ_e jest gęstością masy elementu. Równanie równowagi dynamicznej zapiszemy zatem w postaci

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{R}, \quad (9.2)$$

gdzie \mathbf{R} i \mathbf{d} są wektorami zależnymi od czasu. Macierz mas \mathbf{M} ma postać:

$$\mathbf{M} = \sum_e \int_V \rho_e N_e^T N_e dV_e, \quad (9.3)$$

Macierz M w postaci (9.3) nosi nazwę macierzy konsystentnej (z macierzą sztywności K , ponieważ dla obu macierzy przyjęto te same funkcje kształtu). Zauważmy, że tak sformułowana macierz mas elementu jest w ogólności macierzą pełną. W obliczeniach konstrukcji inżynierskich stosuje się często uproszczoną postać macierzy mas, tzw. macierz niekonsystentną, którą otrzymuje się z modelu dynamicznego w postaci mas skoncentrowanych w węzłach elementów. Istotnym uproszczeniem tego podejścia jest fakt, że otrzymywane niekonsystentne macierze mas mają strukturę diagonalną, co znakomicie upraszcza rozwiązanie równania ruchu.

Zakładając, że p jest stałe, można konsystentną macierz mas dla elementu belkowego obliczyć, korzystając z zależności (9.3):

$$m = \int_0^L \rho N^T N dx = \frac{\rho L}{420} \begin{bmatrix} 1 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & \text{sym.} & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (9.3^1)$$

Macierz niekonsystentną otrzymać można przyjmując, że masa belki skupiona jest po połowie w jej węzłach. Otrzymujemy wtedy:

$$m = \frac{\rho L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & L^2/12 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & 1 & 0 \\ & & & L^2/12 \end{bmatrix} \quad (9.3^2)$$

Powróćmy jednak do równania ruchu. W konstrukcjach rzeczywistych w czasie drgań następuje rozpraszanie (**dysypacja**) **energii**. Zjawisko to uwzględnia się w równaniu ruchu przez wprowadzenie sił zależnych od prędkości ruchu, tzw. sił tłumienia. Uwzględniając te siły ponownie w wektorze sił masowych, otrzymujemy

$$R_B = \sum_e \int N_e^T [f_e^b - \rho_e N_e \ddot{d}_e - \kappa_e N_e \dot{d}_e] dV_e, \quad (9.4)$$

gdzie d_e oznacza wektor prędkości węzłów elementu e , a współczynnik κ tłumienie.

Równanie równowagi dynamicznej, uwzględniające efekt tłumienia, zapiszemy teraz w postaci:

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = R, \quad (9.5)$$

gdzie C jest macierzą tłumienia układu. Macierz tą można zapisać formalnie w postaci:

$$C = \sum_e \int_V \kappa_e N_e^T N_e dV_e, \quad (9.6)$$

Macierz tłumienia przyjmowana jest zazwyczaj w postaci tzw. tłumienia proporcjonalnego:

$$C = \alpha_1 M + \alpha_2 K, \quad (9.7)$$

gdzie współczynniki α_1 i α_2 , są wyznaczone na podstawie udziału poszczególnych postaci drgań własnych.

Zauważmy analogię równania (9.5) do znanego nam z kursu mechaniki technicznej równania ruchu o jednym stopniu swobody ($m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = r$). Jeżeli równanie (9.5) ma opisywać określony problem brzegowo-początkowy, to należy je oczywiście rozpatrywać z warunkami początkowymi:

$$d(t_0) = d \quad (9.8)$$

Z matematycznego punktu widzenia macierzowe równanie (9.5) reprezentuje układ n sprzężonych ze sobą liniowych równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego ze stałymi współczynnikami. Rozwiązanie tego układu (tzn. znalezienie n funkcji-składowych wektora uogólnionych przemieszczeń układu) otrzymać można stosując standardowe podejście rozwiązywania równań różniczkowych ze stałymi współczynnikami. Rozwiązanie to można stosunkowo łatwo otrzymać, gdy liczba równań jest mała, tzn. gdy mamy do czynienia z niewielką liczbą stopni swobody. W zagadnieniach inżynierskich wymiary macierzy, występujących w równaniu (9.5) są jednak duże (często większe od 1000). Dlatego też celowe jest stosowanie takich metod rozwiązania, które wykorzystywałyby pewne cechy tych macierzy (ich symetrię, pasmowość), pozwalając jednocześnie na uproszczenie rozwiązania.

Metody rozwiązywania układu równań różniczkowych o postaci (9.5) można podzielić na dwie zasadnicze grupy: metody całkowania bezpośredniego i metodę superpozycji modalnej. Jak pokażemy niżej obie te metody są sobie bliskie, a wybór jednej z nich zależy będzie od ich numerycznej efektywności.

9.1. Zagadnienia własne w dynamice konstrukcji

Rozpatrzmy obecnie problem tzw. drgań własnych układu bez tłumienia, opisany następującym układem równań:

$$M\ddot{d} + Kd = 0, \quad (9.9)$$

Założmy rozwiązanie układu równań (9.9) w postaci:

$$d(t) = \Phi \sin(\omega t - t_0), \quad (9.10)$$

gdzie macierz Φ składa się z n wektorów zwanych postaciami drgań własnych, a ω jest częstością drgań własnych (w jednostkach: rad/s). Podstawiając powyższe do równania (9.9), otrzymujemy:

$$(K - \omega^2 M)\Phi = 0, \quad (9.11)$$

lub

$$K\Phi = \omega^2 M\Phi \quad (9.12)$$

Równanie (9.11) lub (9.12) definiuje tzw. uogólniony problem własny. Równanie to ma n rozwiązań rzeczywistych w postaci par: wartość własna-wektor własny: (ω_1^2, Φ_1) (ω_2^2, Φ_2) ... (ω_n^2, Φ_n) , gdzie przez Φ_i oznaczono-ty wektor własny, tj. i -tą kolumnę macierzy Φ

Omówimy teraz podstawowe własności wartości i wektorów własnych, występujących w równaniu (9.11), które okazać się mogą przydatne przy ich poszukiwaniu.

1. Każda z wartości własnych i każdy wektor własny spełnia równanie (9.11) lub (9.12):

$$K\Phi_i = \omega_i^2 M\Phi_i. \quad (9.13)$$

Równanie to jest spełnione również przez wektor $\alpha\Phi_i$ (α jest stałą różną od zera), ponieważ

$$K(\alpha\Phi_i) = \omega_i^2 M(\alpha\Phi_i) \quad (9.14)$$

Mówimy zatem, że wektor własny jest zdefiniowany tylko przez jego kierunek w n -wymiarowej przestrzeni. Wymaga się ponadto, by był spełniony warunek

$$\Phi_i^T M \Phi_i = 1 \quad (9.15)$$

Warunek ten ogranicza długość wektora Φ_i . Zależność (9.15) oznacza spełnienie tzw. warunku M-ortonormalności wektorów własnych, bowiem zachodzi

$$\phi_i M \phi_j^T = \delta_{ij}, \quad (9.16)$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera (przyjmuje wartość 1, gdy $i=j$, i równą zero w pozostałych przypadkach). Warunek (9.16) wynika bezpośrednio z ortogonalności wektorów własnych standardowego problemu własnego. Zauważmy, że przemnażając lewostronnie równanie (9.13) przez wektor ϕ_j^T , otrzymujemy

$$\phi_j^T K \phi_i = \omega_i^2 \epsilon_j^T M \phi_i = \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad (9.17)$$

Równanie to obrazuje kolejną własność wektorów własnych problemu (9.11), a mianowicie ich K-ortogonalność.

2. Ważną cechą wartości własnych problemu (9.11) jest to, że są one pierwiastkami równania charakterystycznego

$$p(\omega^2) = \det(K - \omega^2 M) \quad (9.18)$$

bowiem jednorodne równanie (9.11) ma niezerowe rozwiązanie tylko wtedy, gdy

$$\det(K - \omega_i^2 M) = 0 \quad (9.19)$$

Jeżeli macierz $(K - \omega_i^2 M)$ rozłożymy na dolny i górny trójkąt według rozkładu Choleskiego, to

$$\det(K - \omega_i^2 M) = \det(L^T L) = \prod_{i=1}^n l_{ii}, \quad (9.20)$$

co prowadzi do warunku $l_{ii} = 0$, tzn.

$$p(\omega^2) = \prod_{i=1}^n l_{ii} = 0 \quad (9.21)$$

3. Wartości własne są rzeczywiste.

Założmy, że ϕ_i i ω_i^2 są wartościami zespolonymi, a $\bar{\phi}_i$ oraz ω_i^{-2} są z nimi sprzężone. Możemy zapisać

$$K \phi_i = \omega_i^2 M \phi_i, \quad (9.22)$$

i przemnażając lewostronnie przez $\bar{\phi}_i^T$ mamy:

$$\bar{\phi}_i^T K \phi_i = \omega_i^2 \bar{\phi}_i^T M \phi_i, \quad (9.23)$$

Podstawiając do (9.22) rozwiązanie sprzężone i obliczając transpozycję tego równania, otrzymujemy:

$$\phi_i^{-T} \mathbf{K} = \omega_i^2 \phi_i^{-T} \mathbf{M}, \quad (9.24)$$

Następnie przemnażając lewostronnie przez Φ_i , mamy:

$$\phi_i^{-T} \mathbf{K} \phi_i = \omega_i^2 \phi_i^{-T} \mathbf{M} \phi_i, \quad (9.25)$$

Ponieważ lewe strony równań (9.23) i (9.25) są sobie równe, więc otrzymujemy

$$(\omega_i^{-2} - \omega_i^2) \phi_i^{-T} \mathbf{M} \phi_i = 0, \quad (9.26)$$

czyli:

$$\omega_i^{-2} = \omega_i^2 \quad (9.27)$$

wobec czego wartości własne ω_i^{-2} , ω_i^2 muszą być rzeczywiste.

9.2. Transformacja uogólnionego problemu własnego do postaci standardowej

Większość problemów mechaniki, których rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania problemu własnego, prowadzi do standardowego problemu własnego lub może być do niego zredukowana. W tym miejscu chcemy pokazać, jak ten proces można przeprowadzić w przypadku równań dynamiki. Zaznaczmy, że wymaganie to nie jest tylko formalne, ale prowadzi do stosowania znacznie efektywniejszych algorytmów rozwiązywania problemu, niż ma to miejsce w przypadku rozwiązywania uogólnionego problemu własnego. Innymi słowy problem standardowy rozwiązuje się łatwiej i szybciej. Okazuje się ponadto, że własności wartości własnych i wektorów własnych problemu standardowego zachowują swą ważność w problemie uogólnionym, co ma istotne znaczenie z punktu widzenia mechanicznej interpretacji wyników. Biorąc pod uwagę efektywność stosowanych technik obliczeniowych, będziemy starali się zachować ważną cechę macierzy występujących w równaniu równowagi typu (9.11), a mianowicie ich symetrię. Dążyć będziemy do tego, by powstały problem własny był symetryczny.

Założmy, że macierz mas \mathbf{M} jest dodatnio określona. Niespełnienie tego założenia wymaga przeprowadzenia statycznej kondensacji tych stopni swobody, które odpowiadają zerowym wartościom własnym (porównaj rozdz. 5). Równanie $\mathbf{K} \cdot \Phi = \omega^2 \mathbf{M} \Phi$ możemy przetransformować do innej postaci przez dekompozycję macierzy \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T, \quad (9.28)$$

gdzie macierz \mathbf{L} jest dolnym trójkątem otrzymanym w procesie dekompozycji Choleskiego

macierzy M . Podstawiając powyższe do równania (9.11) otrzymujemy:

$$K\phi = \omega^2 L L^T \phi, \quad (9.29)$$

Przemnażając obie strony przez L^{-1} i definiując wektor

$$\tilde{\phi} = L^T \phi, \quad (9.30)$$

otrzymujemy

$$\tilde{K}\tilde{\phi} = \omega^2 \tilde{\phi}, \quad (9.31)$$

gdzie

$$\tilde{K} = L^{-1} K L^{-T}, \quad (9.32)$$

Zauważmy, że macierz \tilde{K} jest macierzą symetryczną. Jeżeli macierz M jest źle uwarunkowana (co prowadzić może do niedokładnej jej dekompozycji), wówczas możemy rozłożyć macierz sztywności K na macierze trójkątne. Przepisując równanie (9.11) w postaci

$$M\phi = \frac{1}{\omega^2} K\phi, \quad (9.33)$$

otrzymamy podobnie jak wyżej

$$M\phi = \frac{1}{\omega^2} \phi, \quad (9.34)$$

gdzie

$$\tilde{M} = L^{-1} M L^{-T}, \quad (9.35)$$

$$K = L^T L, \quad (9.36)$$

$$\tilde{\phi} = L^T \phi, \quad (9.37)$$

Zwróćmy uwagę na pewne cechy przedstawionych wyżej transformacji. W przypadku, gdy macierz M jest diagonalna to macierz K ma tę samą szerokość półpasma co macierz M . Gdy macierz M nie jest diagonalna (czyli jest konsystentna), macierz K jest w ogólności macierzą pełną, co prowadzi do dużego nakładu pracy przy wykonywaniu transformacji. W drugim przypadku łatwo zauważyć, że ponieważ macierz K jest zawsze pasmowa, macierz M jest zawsze macierzą pełną i transformacja jest nieefektywna (wymagana jest duża liczba operacji). Podkreślimy jeszcze, że efektywność algorytmu rozwiązywania równania (9.11) jest bardzo istotna we wszystkich niemal zagadnieniach dynamiki konstrukcji, w każdej bowiem metodzie całkowania równania (9.5) konieczna jest znajomość częstości kołowych i postaci

drgań analizowanego układu.

9.3. Metody całkowania równań ruchu

Powróćmy ponownie do równania macierzowego (9.5). Równanie to, jak już powiedzieliśmy, jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami. Do rozwiązania tego równania można stosować standardowe podejście, jednak ze względu na pewne własności macierzy M , C , K w analizie ruchu ciała dyskretyzowanego elementami skończonymi stosuje się zasadniczo dwie grupy metod: metody całkowania bezpośredniego i metodę superpozycji modalnej. Poniżej omówimy obie te grupy.

9.3.1. Metody całkowania bezpośredniego

W metodach bezpośredniego całkowania równanie ruchu w postaci (9.5) jest całkowane krok po kroku. Termin "całkowanie bezpośrednie" oznacza, że równanie to nie jest przekształcane do innej postaci (w odróżnieniu od metody superpozycji modalnej). Istotą metody całkowania bezpośredniego jest założenie, że równanie ruchu (9.5) ma być spełnione w wybranych chwilach t , a nie w całym przedziale całkowania oraz założenie o charakterze zmienności przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń pomiędzy tymi chwilami.

Założmy zatem, że w chwili $t=0$ są znane przemieszczenia d_0 , prędkości d_0' i przyspieszenia d_0'' układu opisanego równaniem (9.5). Rozpatrywany przedział czasowy $(0, T)$ dzielimy na n równych przedziałów, w których poszukujemy tych wielkości, czyli dla chwili $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t, t+\Delta t, \dots, T$. Zbudujemy algorytm, który pozwoli obliczyć poszukiwane wielkości w następnych krokach, wykorzystując rozwiązanie z poprzedniego kroku. W ten sposób otrzymamy rozwiązania we wszystkich rozpatrywanych chwilach z przedziału $(0, T)$. Opisane wyżej podejście zilustrujemy jedną z metod całkowania bezpośredniego, a mianowicie tzw. metodą różnic centralnych. Metoda ta należy do jednej z najbardziej efektywnych metod tej grupy. W metodzie tej zakłada się zmienność w czasie wektora przyspieszeń w postaci

$$\ddot{d}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (d_{t-\Delta t} - 2d_t + d_{t+\Delta t}), \quad (9.38)$$

a wektor prędkości w postaci

$$\dot{d} = \frac{1}{2\Delta t} (-d_{t-\Delta t} + d_{t+\Delta t}), \quad (9.39)$$

Rozwiązanie równania (9.5) dla chwili $t+\Delta t$ otrzymamy rozpatrując stan równowagi dynamicznej w chwili t :

$$M\ddot{d}_t + C\dot{d}_t + Kd_t = R_t \quad (9.40)$$

Podstawiając wyrażenia na operatory różnicowe (9.38) i (9.39) do (9.40), otrzymujemy:

$$\frac{1}{\Delta t^2}(d_{t-\Delta t} - 2d_t + d_{t+\Delta t})M + \frac{1}{2\Delta t}(d_{t-\Delta t} + d_{t+\Delta t})C + Kd_t = R_t, \quad (9.41)$$

lub

$$\frac{1}{\Delta t^2}(M + \frac{1}{2\Delta t}C)d_{t-\Delta t} = R_t + (\frac{2}{\Delta t^2}(M - K)d_t - (\frac{1}{\Delta t^2}(M - \frac{1}{2\Delta t}C)d_{t-\Delta t}) \quad (9.42)$$

Z równania tego obliczamy poszukiwany stan przemieszczeń w chwili $t+\Delta t$, czyli $d_{t+\Delta t}$. Zauważmy, że rozwiązanie $d_{t+\Delta t}$ jest otrzymywane na podstawie rozwiązania w chwili t . Metodę tę zalicza się zatem do metod całkowania jawnego (explicit). Zauważmy również, że w procesie rozwiązywania równania (9.41) nie wymaga się odwracania macierzy sztywności K , co jest dużą zaletą. Obliczenie wektora d wymaga uprzedniego obliczenia wektora przemieszczeń w chwilach poprzednich t i $t-\Delta t$. Zachodzi więc konieczność opracowania pewnej procedury

startowej. Ponieważ wektory d_0 , d_0' , d_0'' są znane dla chwili $t=0$, dlatego korzystając z (9.38) i (9.39), możemy wyznaczyć d w fikcyjnej chwili poprzedzającej początek ruchu $t-\Delta t$:

$$d_{-\Delta t} = d_0 - \Delta t \cdot d_0' + \frac{\Delta t^2}{2} d_0'' \quad (9.43)$$

Poniżej podano dwustopniowy algorytm całkowania równania ruchu metodą różnic centralnych.

Obliczenia wstępne

1. Obliczenie macierzy **K**, **M**, **C**
2. Obliczenie d_0 , d_0' , d_0''
3. Określenie Δt i obliczenie stałych:

$$a_0 = \frac{1}{2\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{1}{2\Delta t}, \quad a_2 = 2a_0, \quad a_3 = \frac{1}{a_2},$$

4. Obliczenie $d_{-\Delta t} = d_0 - \Delta t d_0' + \Delta t^2 \cdot 0.5 \cdot d_0''$
5. Obliczenie $\tilde{M} = a_0 \cdot M + a_1 \cdot C$
6. Triangularyzacja macierzy \tilde{M} : $\tilde{M} = L \cdot D \cdot L^T$

Obliczenia dla każdego kroku

1. Obliczenie wektora obciążenia efektywnego $\hat{\mathbf{R}}$

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_t - (\mathbf{K} - a_2 \mathbf{M}) \mathbf{d}_t - (a_0 \mathbf{M} - a_1 \mathbf{C}) \mathbf{d}_{t-\Delta t}$$

2. Rozwiązanie równania (9.41) dla chwili $t+\Delta t$

$$\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{d}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_t$$

3. Obliczenie wektorów prędkości i przyspieszeń (o ile jest to wymagane)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}}_t &= a_0 (\mathbf{d}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{d}_t + \mathbf{d}_{t+\Delta t}), \\ \dot{\mathbf{d}}_t &= a_1 (-\mathbf{d}_{t-\Delta t} + \mathbf{d}_{t+\Delta t}), \end{aligned}$$

W przypadku, gdy macierz tłumienia jest równa zeru, równanie (9.41) upraszcza się do postaci:

$$\frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{M}) \mathbf{d}_{t-\Delta t} = \hat{\mathbf{R}}_t \quad (9.44)$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} - (\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}) \mathbf{d} - (-\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}) \mathbf{d} \quad (9.45)$$

Gdy w równaniu (9.44) macierz mas będzie diagonalna, wtedy rozwiązanie otrzymuje się, wykonując tylko przypisane wzorem (9.45) mnożenia:

$$\mathbf{d}_{t+\Delta t}^{(i)} = \hat{\mathbf{R}}_t^{(i)} \left(\frac{\Delta t^2}{m_{ii}} \right), \quad (9.46)$$

gdzie $\mathbf{d}_{t+\Delta t}^{(i)}$ oraz $\mathbf{R}_t^{(i)}$ oznaczają i -te składowe wektorów $\mathbf{d}_{t+\Delta t}^{(i)}$ i $\mathbf{R}_t^{(i)}$, a m_{ii} i -tą składową diagonalnej macierzy mas (założyliśmy dodatkowo, że $m_{ii} > 0$). Zauważmy również, że ponieważ nie rozwiązujemy w tym przypadku układu równań liniowych, nie jest też wymagana znajomość globalnych macierzy sztywności i mas. Macierze te mogą być określone tylko na poziomie elementów, a ich udział uwzględniany odpowiednio przy budowie wektora \mathbf{R} .

Z postaci równania (9.46) i powyższej uwagi wynika, że metoda różnic centralnych w tym przypadku jest bardzo efektywna. Widać bowiem, że do rozwiązania (9.46) nie jest wymagana duża pamięć komputera (nie mamy globalnych macierzy), a rozwiązanie uzyskuje się, wykonując tylko mnożenia macierzy (a nie ich triangularyzację).

Podstawowe korzyści tej metody osiąga się w przypadku, gdy macierz mas jest diagonalna i tłumienie układu można pominąć. Chociaż, jak wspomnieliśmy wcześniej, diagonalna postać macierzy mas jest tylko pewnym jej przybliżeniem, to jednak na skutek bardzo prostej procedury całkowania równań ruchu w tej

postaci opłaca się dokonywać nawet bardzo gęstego podziału analizowanego układu na elementy skończone, by zrekompensować przybliżoną jej postać.

Ważną cechą metody różnic centralnych jest jej zależność od kroku całkowania Δt . Okazuje się bowiem, że krok ten nie może być dowolnie duży i musi spełniać zależność

$$\Delta t \leq \Delta t_{kr} = \frac{T_n}{\pi}, \quad (9.47)$$

gdzie T jest najmniejszym okresem drgań własnych układu.

Czytelnik łatwo zauważy silne ograniczenie tej metody wynikające z pojawienia się warunku (9.47). Okazuje się, że w celu określenia najmniejszego okresu drgań należy obliczyć największą częstość drgań własnych, czyli rozwiązać pełny problem (9.11). Metody całkowania, które wymagają spełnienia warunku typu (9.47), nazywają się metodami warunkowo stabilnymi. Oznacza to, że niespełnienie tego warunku może powodować narastanie (akumulację) błędów całkowania i zaokrągleń w trakcie rozwiązywania równań ruchu.

Wśród innych metod całkowania bezpośredniego równań ruchu, których nie będziemy tutaj omawiać, należy wymienić metodę Houbolta, Wilsona i Newmarka. Metody te należą do metod bezwarunkowo stabilnych (pod warunkiem przyjęcia pewnych wartości współczynników, które charakteryzują każdą z nich).

9.3.2. Metoda superpozycji modalnej

Efektywność metod całkowania bezpośredniego równań ruchu maleje, gdy liczba kroków jest duża. Oznacza to, że celowe jest stosowanie tych metod w przypadku analizy ruchu w stosunkowo krótkim czasie jego trwania. Gdy czas ten jest długi, to celowe jest przekształcenie równania (9.5) w inną postać, dla której analiza ruchu będzie efektywniejsza. Podsumowując powyższe, gdy liczba stopni swobody układu jest duża i liczba kroków jest również duża, to lepiej jest przekształcić układ równań równowagi do postaci wymagającej mniejszego nakładu pracy.

Najczęściej przekształcenia takiego można dokonać wykorzystując rozwiązania problemu drgań własnych

$$M\ddot{d} + Kd = 0 \quad (9.48)$$

Przypomnijmy, że rozwiązaniem równania macierzowego (9.48) jest n par (ω_i^2, Φ_i) , czyli macierze o postaci:

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad (9.49)$$

Porównując wzory (9.15) i (9.17), widzimy, że spełnione są następujące zależności:

$$\phi^T K \phi = \Omega^2 \quad \text{i} \quad \phi^T M \phi = 1 \quad (9.50)$$

Dokonajmy teraz transformacji równania (9.5), stosując podstawienie

$$d(t) = \phi x(t) \quad (9.51)$$

Otrzymamy wówczas równanie ruchu w postaci:

$$M \phi \ddot{X} + C \phi \dot{X} + K \phi X = R, \quad (9.52_1)$$

a po lewostronnym przemnożeniu przez Φ^t otrzymamy:

$$\phi^T M \phi \ddot{X} + \phi^T C \phi \dot{X} + \phi^T K \phi X = \phi^T R, \quad (9.52_2)$$

Biorąc pod uwagę (9.50), mamy ostatecznie:

$$\ddot{X} + \phi^T C \phi \dot{X} + \Omega^2 X = \phi^T R, \quad (9.53)$$

Równanie (9.52) należy jeszcze uzupełnić warunkami początkowymi:

$$X_0 = \phi^T M d_0, \quad \dot{X}_0 = \phi^T M \dot{d}_0, \quad (9.54)$$

Z równania (9.53) wynika, że gdy pominiemy macierz tłumienia, to otrzymamy układ równań rozprzężony w postaci

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = \phi^T R, \quad (9.55)$$

tj. n równań skalarnych

$$\ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = r_i(t) \quad (9.56)$$

gdzie

$$r_i(t) = \phi_i^T R(t) \quad (9.57)$$

Warunki początkowe ruchu otrzymamy z (9.54):

$$x_{i0} = \phi_i^T M d_0, \quad \dot{x}_{i0} = \phi_i^T M \dot{d}_0, \quad (9.58)$$

Rozwiązanie równań (9.56) możemy uzyskać w sposób przedstawiony w poprzednim rozdziale, tj. wykorzystując jedną z metod całkowania bezpośredniego lub wykorzystując tzw. całkę Duhamela:

$$x_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t r_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau + \alpha_i \sin \omega_i t + \beta_i \cos \omega_i t, \quad (9.59)$$

gdzie stałe α_i i β_i wyznacza się z warunków początkowych (9.58). Równanie (9.59) rozwiązuje się zazwyczaj numerycznie. Aby otrzymać rozwiązanie naszego problemu wyjściowego należy po rozwiązaniu n równań (9.56) powrócić do transformacji (9.51). W ten sposób otrzymamy ostatecznie rozwiązanie w postaci:

$$d(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i x_i(t), \quad (9.60)$$

Podsumowując, w metodzie superpozycji modalnej w przypadku braku sił tłumienia należy najpierw rozwiązać uogólniony problem własny, następnie rozprzężony układ równań równowagi, a na koniec dokonać superpozycji każdego z otrzymanych rozwiązań według zależności (9.60).

Dodajmy na koniec, że w wielu przypadkach praktycznych możemy uwzględnić w (9.60) tylko kilka pierwszych wektorów $\langle t \rangle$. (postaci drgań), co dalej znakomicie upraszcza powyższy algorytm. W przypadku analizy ruchu opisanego pełnym równaniem (9.53), tzn. z uwzględnieniem tłumienia, metoda superpozycji modalnej może być nadal efektywna, gdy założymy tłumienie proporcjonalne:

$$\phi_i^T C \phi_j = 2\omega_i \zeta_i \delta_{ij}, \quad (9.61)$$

gdzie ζ_i jest współczynnikiem tłumienia, a δ_{ij} symbolem Kroneckera. W ten sposób założyliśmy, że wektor własny (postać drgań) jest również C-ortogonalny i ostatecznie otrzymujemy równanie ruchu w postaci:

$$\ddot{x}_i(t) + 2\omega_i \zeta_i \dot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = r_i(t), \quad (9.62)$$

które rozwiązuje się w podobny sposób, jak dla przypadku bez tłumienia, z tym

tylko, że całka Duhamela ma teraz nieco inną postać uwzględniającą efekt tłumienia

$$x_i(t) = \frac{1}{\bar{\omega}_i} \int_0^t r_i(\tau) e^{-\zeta_i \omega_i (t-\tau)} \sin \bar{\omega}_i (t-\tau) d\tau + e^{-\zeta_i \omega_i t} (\alpha_i \sin \bar{\omega}_i t + \beta_i \cos \bar{\omega}_i t), \quad (9.63)$$

gdzie

$$\bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (9.64)$$

a stałe α_i i β_i .. wyznacza się z warunków początkowych (9.58).

Zadania

1. Wyprowadzić wzór na współczynniki macierzy mas M (9.3), wykorzystując sformułowanie energetyczne (energię kinetyczną).
2. Wyprowadzić wzór na macierz mas M dla pręta kratownicy płaskiej:
 - macierz konsystentną,
 - macierz niekonsystentną.
3. Rozwiązać zagadnienie drgań swobodnych układu o postaci

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

i warunkach początkowych $d^0 = \dot{d}^0 = 0$ w przedziale czasowym $[0, 2T_1]$, gdzie T_1 jest najmniejszym okresem drgań własnych (przyjąć $\Delta t = T_1/10$). Wykorzystać metodę różnic centralnych i metodę superpozycji modalnej. Porównać wyniki z rozwiązaniem dokładnym:

$$d = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0.5\sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/\sqrt{3}(1 - \cos\sqrt{2}t) \\ 2\sqrt{2/3} - (1 + \cos\sqrt{5}t) \end{bmatrix}$$

4. Rozwiązać za pomocą całki Duhamela równanie ruchu układu o jednym stopniu swobody w postaci:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = R \sin pt \quad \text{oraz} \quad x_0 = 0 \quad \dot{x}_0 = 1$$

5. Obliczyć macierz transformacji Φ dla problemu drgań, przedstawionego za pomocą macierzy w zadaniu 2. Następnie napisać rozprzężony układ równań (9.56).