DODATEK A

ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH ALGEBRAICZNYCH

W literaturze cytuje się wiele metod numerycznego rozwiązywania układów równań liniowych o postaci

$$A \cdot X = B \tag{A.1}$$

Niektóre z nich są szczególnie nakierowane na szybkość operacji, najmniejszą zajętość pamięci, wykorzystują też dodatkowe cechy macierzy współczynników A, takie jak symetria czy pasmowość. Spośród tych wielu dostępnych w literaturze procedur omówimy jedną, tzw. metodę rozkładu trójkątnego macierzy Choleskiego - Banachiewicza. Metoda ta jest z powodzeniem stosowana dla macierzy A symetrycznych i dodatnio określonych, a z takimi właśnie macierzami mamy do czynienia w zadaniach metody elementów skończonych dotyczących liniowej analizy statycznej konstrukcji sprężystych. Macierz A można rozłożyć na dwie macierze w ten sposób, by

$$A = U^{T} \cdot U \tag{A.2}$$

gdzie **U** jest górną macierzą trójkątną. Macierz A można także rozłożyć do postaci

$$A = \overline{U}^{T} \cdot D \cdot \overline{U} \tag{A.3}$$

zwanej postacią zmodyfikowaną metody Choleskiego. U jest górną macierzą trójkątną z jedynkami na głównej przekątnej. Symbol D reprezentuje macierz diagonalną, zawierającą kwadraty składowych diagonalych macierzy U. Równania

rekurencyjne U_{ij}., i D_{ij}.., generowane kolumnami dla j=2,3,...,n, dają

$$\overline{U}_{ij} = \frac{1}{D_{ii}} \cdot \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk} \overline{U}_{ki} \overline{U}_{kj} \right), \qquad (1<i<j) \tag{A.4}$$

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} D_{kk} \overline{U}_{kj}^{\,2} \qquad (1<i=j)$$

Obydwa te równania zawierają wyrażenie D_{kk} , .U_{kj} . pod znakiem sumy.Jeżeli podstawimy :

$$\overline{U}_{kj}{}^{*} = D_{kk} \overline{U}_{kj}, \tag{A.5}$$

wówczas

$$\overline{U}_{ij}{}^{*} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk} \overline{U}_{ki} \overline{U}_{kj}{}^{*} \qquad (1<i<j) \tag{A.6}$$

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \overline{U}_{kj} \cdot \overline{U}_{kj}{}^{*} \qquad (1<i=j)$$

gdzie j=2,3,...,n, oraz

$$\overline{U}_{kj} = \frac{1}{D_{kk}} \overline{U}_{kj}{}^{*}, \tag{A.7}$$

Zatem dla kolumny j osiąga się chwilowy wynik na U_{ij}. dla każdej składowej spoza głównej diagonali według (A.6). Dalej na podstawie (A.6) oblicza się wyraz diagonalny D_{jj}., i równocześnie końcową wartość każdego składnika poza główną przekątną.

Załóżmy, że chcemy rozwiązać układ równań liniowych typu

$$A \cdot X = B \tag{A.8}$$

w którym X jest kolumną n niewiadomych, zaś B jest wektorem stałych. Podstawmy (A.3) do (A.8):

$$\overline{U}^{T} \overline{D} \cdot \overline{U} \cdot X = B, \tag{A.9}$$

a podstawiając

$$\overline{U} \cdot X = Y \tag{A.10}$$

oraz

$$D \cdot Y = Z \tag{A.11}$$

otrzymujemy układ

$$\overline{U}^{T} \cdot Z = B, \tag{A.12}$$

Teraz wektor niewiadomych X otrzymujemy w trzech krokach :

1. Ponieważ **U** jest dolną macierzą trójkątną, elementy wektora **Z** otrzymamy w procesie podstawienia w przód :

$$Z_i = B_i - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{U}_{ki} Z_k \qquad (1<i) \tag{A.13}$$

, 2. Macierz **D** jest diagonalna, więc

$$Y_i = \frac{Z_i}{D_{ii}}, \qquad (1=1,2,\ldots,n) \tag{A.14}$$

3. W trzecim kroku znajdujemy wektor X, stosując podstawienie odwrotne (rozpoczynając od ostatniej niewiadomej):

$$X_i = Y_i - \sum_{k=i+1}^{n} \overline{U}_{ik} X_k \qquad (i<n) \tag{A.15}$$

Przykład

Posługując się metodą zmodyfikowaną Choleskiego, spróbujemy rozwiązać następujący układ równań liniowych typu

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 700 & -200 \\ 0 & -200 & 700 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Dokonujemy rozkładu macierzy współczynników A na trzy macierze (A.3), korzystając z zależności (A.4). Kolejno otrzymujemy :

$$D_{11} = A_{11} = 200.00$$

$$\overline{U}_{11} = 1.00$$

$$\overline{U}_{12} = \frac{1}{D_{11}}(A_{12}) = \frac{1}{200} 0 = 0.00$$

$$\overline{U}_{13} = \frac{1}{D_{11}}(A_{13}) = \frac{1}{200} 0 = 0.00$$

$$\overline{U}_{22} = 1.00$$

$$D_{22} = A_{22} - D_{11}\overline{U}_{11}^{\,2} = 400 - 200 = 200.00$$

$$\overline{U}_{23} = \frac{1}{D_{23}}(A_{23} - D_{11}\overline{U}_{12}\overline{U}_{13}) = \frac{1}{200}(-200 - 200(-1)(0) = -1.00$$

$$D_{33} = A_{33} - D_{11}\overline{U}_{13}^{\,2} - D_{22}\overline{U}_{23}^{\,2} = 400 - 200 \cdot 0^2 - 200 \cdot (-1)^2 = 200.00$$

Macierz **A** można więc przedstawić w postaci :

$$A = \overline{U}^T \cdot D\overline{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teraz już łatwo rozwiążemy układ równań, stosując (A. 13), (A. 14) i (A. 15):

$$Z_1 = B_1 = 15,$$
$$Z_2 = B_2 - \overline{U}_{12} Z_1 = 30 - (-1.0) \cdot 15 = 45,$$
$$Z_3 = B_3 - \overline{U}_{13} Z_1 - \overline{U}_{23} Z_2 = 30 - (0) \cdot 15 - (-1) \cdot 45 = 75,$$

$$Y_1 = \frac{Z_1}{D_{11}} = \frac{15}{200} = 0.075,$$
$$Y_2 = \frac{Z_2}{D_{22}} = \frac{45}{200} = 0.225,$$
$$Y_3 = \frac{Z_3}{D_{33}} = \frac{75}{200} = 0.375,$$

i w końcu

$$X_3 = Y_3 = 0.375,$$
$$X_2 = Y_2 - \overline{U}_{23} X_3 = 0.225 - (-1) \cdot 0.375 = 0.600,$$
$$X_1 = Y_1 - \overline{U}_{12} X_2 - \overline{U}_{13} X_3 = 0.075 - (-1) \cdot 600 - (0) \cdot 0.375 = 0.675.$$