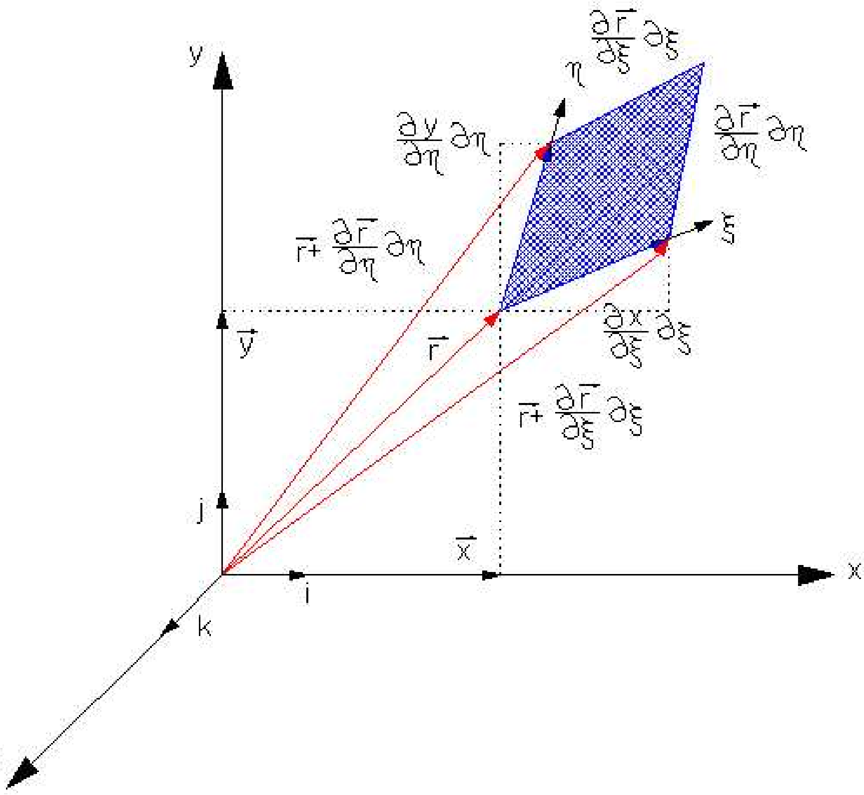
DODATEK B

CAŁKOWANIE NUMERYCZNE W PRZESTRZENI DWUWYMIAROWEJ

Rozwiązania całki **I = $\iint_A$ f(x,y)** dxdy można dokonać łatwiej, jeżeli wpierw dokonamy transformacji tego wyrażenia do układu współrzędnych naturalnych ξ i η. Ponadto granice każdej z całek powinny być równe -1 lub +1. Pole **dA = dxdy** musi być zamienione zmiennymi dξ i dη.

Rysunek B.1 przedstawia nieskończenie małe pole dA w układzie współrzędnych naturalnych ξ i η. Wektor **r** określa położenie punktu A w układzie współrzędnych kartezjanskich x i y :

$$r = x + y = xi + yj, \tag{B.1}$$



Rys. B.1. Elementarne pole dA w układzie współrzędnych naturalnych

Przyrost tego wektora ze względu na zmienne naturalne wynosi :

$$\frac{\delta r}{\delta \xi} = \frac{\delta x}{\delta \xi} \cdot i + \frac{\delta y}{\delta \xi} \cdot j,$$
$$\frac{\delta r}{\delta \eta} = \frac{\delta x}{\delta \eta} \cdot i + \frac{\delta y}{\delta \eta} \cdot j. \qquad \text{(B.2)}$$

Jeżeli pomnożymy wyrażenia (D.Z^1) i (D.Z^2) odpowiednio przez dξ i dη, to uformujemy boki czworokąta (rys.B.1) o infinitezymalnym polu dA. Jego wielkość wyznaczamy na podstawie potrójnego produktu wektorowego :

$$dA = \left(\frac{\delta r}{\delta \xi} \cdot d\xi \cdot \frac{\delta r}{\delta \eta} \cdot d\eta \right) \cdot k, \qquad \text{(B.3)}$$

co po podstawieniach (B.2) prowadzi do

$$dA = \left(\frac{\delta x}{\delta \xi} \cdot \frac{\delta y}{\delta \eta} - \frac{\delta y}{\delta \xi} \cdot \frac{\delta x}{\delta \eta} \right) \cdot d\xi d\eta, \qquad \text{(B.4)}$$

lub w postaci wyznacznika do

$$dA = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta \xi} & \frac{\delta y}{\delta \xi} \\ \frac{\delta x}{\delta \eta} & \frac{\delta y}{\delta \eta} \end{vmatrix} \cdot d\xi d\eta = |J| \cdot d\xi d\eta, \qquad \text{(B.5)}$$

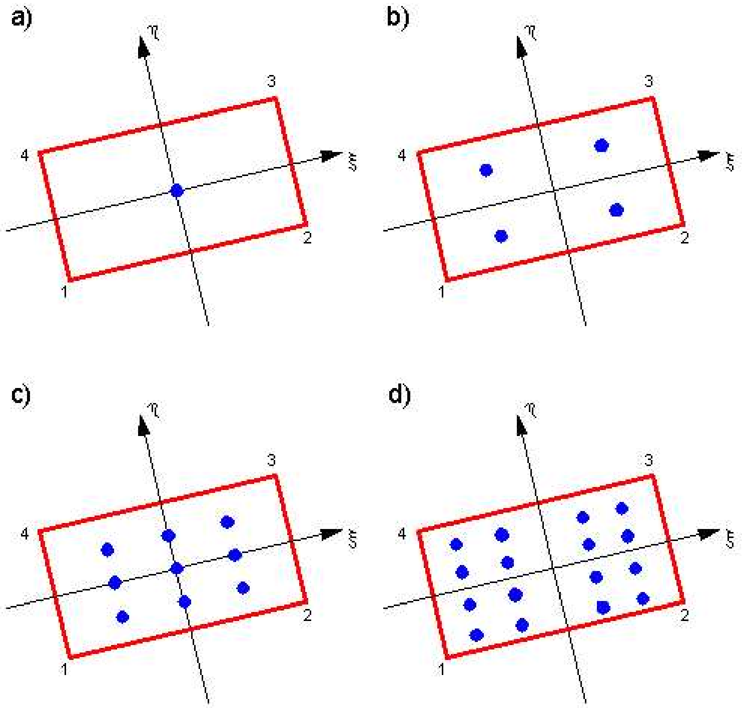
gdzie J jest macierzą jakobianu. Tak więc nowa postać wyjściowego wyrażenia całkowego jest następująca :

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi, \eta) \cdot |J| \cdot d\xi d\eta. \qquad \text{(B.6)}$$

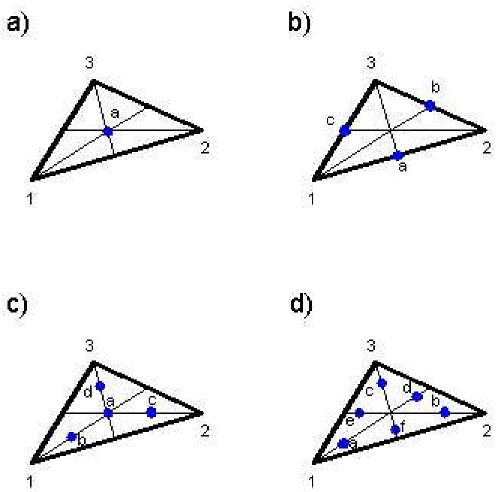
Konsekwentne stosowanie kwadratur Gaussa prowadzi do znalezienia całki w postaci:

$$I = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_k f(\xi_j, \eta_k) \cdot |J(\xi_j, \eta_k)| \qquad \text{(B.7)}$$

gdzie a., a są współczynnikami wag dla punktów o współrzędnych (ξ, η). Położenie punktów Gaussa dla n=1,2,3 i 4 pokazano na rysunku B.2.



Rys. B. 2. Punkty Gaussa dla elementu czworokątnego



Rys. B.3. Punkty Gaussa dla elementu trójkątnego

Punkty próbne i wagi dla trójkąta

Dla trójkąta o polu powierzchni **A** przy zastosowaniu współrzędnych naturalnych ξ_1 ξ_2 ξ_3 całkowanie numeryczne odbywa się według formuły

$$I = A\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot f(\xi_1\xi_2\xi_3)_j \tag{B.8}$$

Rysunek B. 3 przedstawia schematycznie położenie punktów całkowania dla n = 1,3,4 i 6, zaś w tablicy B.1 dodatkowo zestawiono współczynniki wag α_j, odpowiadające tym punktom.

$$\delta_1 = 0.816847, \quad \delta_2 = 0.108103,$$
$$\beta_1 = 0.091576, \quad \beta_2 = 0.44595,$$
$$\gamma_1 = -\frac{27}{48}, \quad \gamma_2 = \frac{25}{48},$$
$$\gamma_3 = 0.10995174, \gamma_4 = 0.2238159.$$

Tablica B.1

Położenie punktów Gaussa i wartości wag dla różnych rzędów całkowania

n	Rząd	Punkty	ξ_1 ,ξ_2 ,ξ_3	α_j
1	Liniowy	a	1/3, 1/3, 1/3	1
3	kwadratowy	a	1/2, 1/2, 0	1/3
		b	0, 1/2, 1/2	1/3
		c	1/2, 0, 1/2	1/3
	sześcienny	a	1/3, 1/3, 1/3	γ_1
		b	0.6, 0,2, 0.2	γ_2
		c	0.2, 0.6, 0.2	γ_3
		d	0.2, 0.2, 0.6	γ_4
	4 stopnia	a	δ_1, β_1, β_1	γ_3
		b	β_1, δ_1, β_1	γ_3
		c	β_1, β_1,δ_1	γ_3
		d	δ_2,β_2, β_2	γ_4
		e	β_2, δ_2, β_2	γ_4
		f	β_2, β_2, δ_2	γ_4