

DODATEK C

ROZWIĄZANIE UOGÓLNIIONEGO PROBLEMU WŁASNEGO METODĄ ITERACJI ODWROTNYCH

Istnieje wiele efektywnych metod służących do rozwiązania równania macierzowego

$$K\phi = \lambda M\phi. \tag{C.1}$$

Metody te Czytelnik zapewne poznał podczas kursu matematyki i kursu poświęconego metodom numerycznym. Poniżej przedstawimy jedną z możliwych metod iteracyjnych rozwiązania równania (C.1), która ze względu na prosty algorytm zasługuje, naszym zdaniem, na uwagę.

W metodzie iteracji odwrotnych przyjmuje się pewien wektor początkowy x i dla kolejnych iteracji rozwiązuje się równanie

$$K\bar{x}_{k+1} = Mx_k, \tag{C.2}$$

gdzie

$$x_{k+1} = \frac{\bar{x}_{k+1}}{\left(\bar{x}_{k+1}^T \cdot M \cdot \bar{x}_{k+1} \right)^{\frac{1}{2}}} \tag{C.3}$$

Wektor x nie może być M -ortogonalny do Φ_1 , tzn. $x_1^T \cdot M \Phi_1 \neq 0$. Zakłada się, że dla $k \rightarrow \infty$ otrzymamy $x_{k+1} \rightarrow \Phi_1$. Głównym krokiem metody jest rozwiązanie równania (C.2), czyli wyznaczenie wektora x_{k+1} , którego kierunek zbliża się do wektora własnego w miarę zwiększania liczby iteracji. Warunek (C.3) wprowadza się, aby nowy wektor był M -ortogonalny. Gdybyśmy nie zastosowali skalowania (C.3), to podczas kolejnych iteracji wektory x nie zbiegałyby się do A , lecz do jego wielokrotności.

Prześledźmy na poniższym przykładzie zastosowanie przedstawionej metody. Rozwiążmy problem własny (C.1) o macierzach:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (C.4)$$

Pierwszym krokiem metody jest dekompozycja macierzy K do postaci $L^T \cdot D \cdot L$ (patrz Dodatek A). Macierze te mają postać:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 & \\ 0 & 0 & \frac{-3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & \frac{3}{2} & & \\ & & \frac{4}{3} & \\ & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (C.5)$$

Jak wspomnieliśmy wyżej, początkowy wektor x_1 nie może być ortogonalny do wektora Φ_1 . Doświadczenie wskazuje, że wektor ten najlepiej przyjąć jako wektor o składowych równych jedności. Przyjmijmy zatem:

$$x_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad (C.6)$$

Dla $k=1$ mamy

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

Skąd otrzymujemy:

$$\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2^T \cdot M \cdot \bar{x}_2 = 136 \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{136}} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}. \quad (C.8)$$

dla drugiej iteracji otrzymujemy:

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{136}} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 48 \\ 56 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_3^T \cdot M \cdot \bar{x}_3 = \frac{6336}{136} \quad (C.9)$$

skąd

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{6336}} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 48 \\ 56 \end{bmatrix}, \quad x_3 = [0.251 \quad 0.503 \quad 0.603 \quad 0.704] \quad (C.10)$$

Porównując x_3 z rozwiązaniem dokładnym:

$$\Phi_1 = [0.25, 0.5, 0.602, 0.707],$$

widać, że metoda iteracji odwrotnych daje zadowalające wyniki, nawet dla niewielkiej liczby iteracji.

Równania (C. 2) i (C. 3) stanowią podstawę metody iteracji odwrotnych. W implementacjach komputerowych stosuje się trochę odmienny, bardziej efektywny tok postępowania. Zakładając mianowicie, że $y_1 = M \cdot x_1$, dla kolejnych iteracji, mamy:

$$\begin{aligned} K \cdot \bar{x}_{k+1} &= y_k, \\ \bar{y}_{k+1} &= M \cdot \bar{x}_{k+1}, \\ \rho(\bar{x}_{k+1}) &= \frac{\bar{x}_{k+1}^{-T} \cdot y_k}{\left(\bar{x}_{k+1}^{-T} \cdot \bar{y}_{k+1} \right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (C.11)$$

a ponieważ, $y_1^T \Phi_1 \neq 0$, więc gdy $k \rightarrow \infty$ otrzymamy:

$$y_{k+1} \Rightarrow M \cdot \alpha \Phi_1 \quad \text{i} \quad \rho(\bar{x}_{k+1}) \Rightarrow \lambda_1 \quad (C.12)$$

Zauważmy bowiem, że $\rho(x_{k+1})$ jest ilorazem Rayleigha. Proces iteracyjny przerywa się, gdy spełniony jest warunek

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} \leq \text{tolerancji}. \quad (C.13)$$

Gdy ostatnią iterację oznaczymy przez 1 to ostatecznie otrzymamy:

$$\lambda_1 = \rho(\bar{x}_{l+1}) \quad (\text{C.14})$$

i z (C.3)

$$\phi_1 = \frac{\bar{x}_{l+1}}{(\bar{x}_{l+1}^\top \cdot \bar{y}_{l+1})^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{C.15})$$

Powtórzmy obliczony wyżej przykład, stosując teraz to podejście. Dla tego samego wektora początkowego i dla $k=1$ mamy:

$$y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.16})$$

$$\rho(\bar{x}_2) = \frac{\bar{x}_2^\top \cdot y_1}{\bar{x}_2^\top \cdot \bar{y}_2} = 0.1470588$$

i

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 1.02899 \\ 0.00000 \\ 0.68599 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

Następne iteracje przebiegają według podobnego schematu. Po pięciu iteracjach otrzymamy następujące wyniki:

$$\lambda_1 = 0.146447, \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 0.25001 \\ 0.50001 \\ 0.60355 \\ 0.70709 \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

Dokładna wartość własna wynosi $\lambda_1 = 0.1464466$.