

Wymiarowanie cięgien - wybrane zagadnienia

Wielkościami charakteryzującymi wytrzymałość lin są: **nominalna siła zrywająca** oraz rzeczywista siła zrywająca linę. **Nominalna siła zrywająca** linę N_n jest siłą teoretyczną, powstałą przez zsumowanie wytrzymałości pojedynczych drutów liny, a rzeczywista siła zrywająca linę N_{rz} jest siłą powodującą zerwanie liny przy statycznej próbie na rozciąganie. Ponieważ druty w linie nie są ułożone równolegle, ale są skręcane i splatane, **rzeczywista siła zrywająca** linę jest zawsze mniejsza od siły nominalnej. Między obu wielkościami zachodzi związek:

$$N_{rz} = N_n \eta, \quad (1)$$

tu: η - współczynnik sprawności wytrzymałościowej ($\eta = 0,75 \div 0,9$).

Mniejsze wartości współczynnika odnoszą się do lin splotowych (wielozwitych) z rdzeniem niemetalowym, a wartości większe dotyczą lin spiralnych zamkniętych. Przykładowe właściwości wytrzymałościowe kilku wybranych rodzajów lin zestawiono w tabelicy 1. Uwzględniono liny spiralne otwarte (zalecane jako liny do sprężania).

Tablica 1. Liny spiralne otwarte (PN-/M-80236)

Nominalna średnica liny mm	Siła zrywająca linę, kN			
	nominalna		rzeczywista	
	I	II	I	II
7,8	72,9	65,8	69,0	62,0
12,8	193,0	174,0	180,0	162,0
15,5	219,0	205,0	208,0	194,0
25,5	584,0	546,0	543,0	507,0
35,5	1130,0	1050,0	1050,0	976,0
45,5	1860,0	1740,0	1700,0	1590,0

I, II - odmiana (klasa) liny

Obliczeniowa siła S rozciągająca linę powinna spełniać warunek:

$$(S_o = n \cdot S) \leq \frac{N_{rz}}{n_b}, \quad (2)$$

gdzie: n_b - współczynnik pewności (bezpieczeństwa),

n - współczynnik obciążenia,

S - charakterystyczna siła rozciągająca

Wartość współczynnika n jest przyjmowana arbitralnie, z uwzględnieniem jednak takich okoliczności, jak doświadczenie projektanta, dokładność przeprowadzonych obliczeń oraz, głównie, **konsekwencje ewentualnego zniszczenia obiektu.**

W konstrukcjach budowlanych przyjmuje się $n = 2,0 \div 3,0$.

Przedstawiona prosta metoda wymiarowania cięgien jest stosowana od wielu lat i to zarówno w kraju, jak i za granicą, chociaż nie ma dostatecznych źródeł w aktualnych przepisach normowych.

Wytrzymałość obliczeniową f_d dla cięgien (lin) należy przyjmować według wzoru:

$$f_d = \frac{w \cdot R_m}{k} = \frac{0,65R_m}{k} \quad (\text{dla stali } w = \overset{\text{węglowej}}{\downarrow} 0,62 \div 0,78) \quad (3)$$

\uparrow
stopowej

gdzie: R_m - wytrzymałość na rozciąganie materiału (druetu) ciągną

k - współczynnik efektu statystycznego skali (dla lin $1,05 \div 1,20$).

Współczynnik k uwzględnia znany z doświadczenia fakt, że nośność liny maleje wraz ze wzrostem jej długości.

Naprężenia obliczeniowe w ciągnię powinny spełniać warunek:

$$\sigma = \frac{S_o}{A \cdot \gamma} \leq f_d, \quad (4)$$

gdzie: S_o - siła obliczeniowa w ciągnię,

A - przekrój ciągną,

γ - współczynnik konsekwencji zniszczenia ($\gamma = 1,25 \div 1,5$).

Podstawy wymiarowania cięgien wiotkich

Równanie nierozciągliwego cięgna

W obliczeniach cięgna prostego wyznaczyć trzeba:

- a) długość cięgna (przykład dla obciążenia równomiernego)
- b) naciąg cięgna oraz obciążenia na podpory cięgna

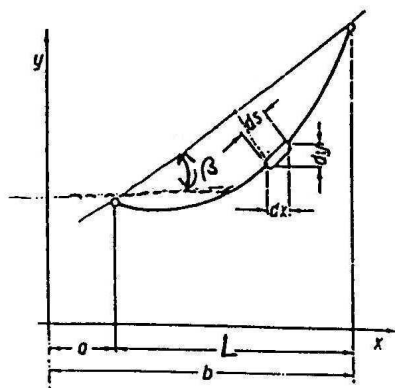
Sposób obliczeń zależy od tego czy wystąpi znaczny przyrost długości cięgna pod obciążeniem czy też można przyjąć stałą długość cięgna (to drugie założenie może mieć miejsce jedynie przy wstępnym określaniu H oraz f).

ad a)

Wyznaczenie długości cięgna równomiernie obciążonego wzdłuż cięciwy

Przy rozwiązywaniu wielu zadań ze statyki cięgna, zwłaszcza układów statycznie niewyznaczalnych, niezbędna jest znajomość długości cięgna. Obliczymy ją w sposób klasyczny jako całkę wzdłuż rozpiętości (L) elementarnego łuku ds

$$s = \int_0^L ds = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (5)$$



Wyznaczenie długości
krzywej zwisu

Rozważamy ciężno o bardzo małych strzałkach zwisu (małym kącie nachylenia ciężniwy $\beta < 15^\circ$), dlatego można uważać przyrost dy/dx za bardzo małą wielkość w porównaniu z jednością. Wobec tego można zastosować przybliżenie

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx \quad (6)$$

Pochodną dy/dx otrzymamy różniczkując prawą stronę równania krzywej zwisu.

Pod wpływem własnego ciężaru otrzymamy krzywą zwisu:

$$y = \frac{4f_{\max}x(L-x)}{l^2} - x \operatorname{tg}\beta \quad (7)$$

Podstawiając do (7): $f_{\max} = \frac{qL^2}{8H \cdot \cos\beta}$

otrzymamy (8):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{qx(L-x)}{2H \cos\beta} - x \operatorname{tg}\beta \right] = \left[\frac{q}{2H \cos\beta} (L-2x) - \operatorname{tg}\beta \right]. \quad (8)$$

Po podstawieniu (8) do wzoru (6), otrzymujemy przyrost długości ciężni według:

$$ds = dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{q}{2H \cos\beta} (L-2x) - \operatorname{tg}\beta \right]^2 \right\} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{q^2}{4H^2 \cos^2\beta} (L^2 + 4x^2 - 4Lx) + \operatorname{tg}^2\beta - \frac{q}{H \cos\beta} (L-2x) \operatorname{tg}\beta \right] \right\} dx \quad (8A)$$

Po obustronnym scałkowaniu w granicach od 0 do L i redukcji wyrazów podobnych, otrzymamy wzór na długość krzywej zwisu s:

$$s = L + \frac{h^2}{2L} + \frac{q^2 L^3}{24H^2 \cos^2 \beta} \quad (9)$$

Wzór ten można uprościć korzystając z rysunku według poniższych zależności:

$$s = c + \frac{8}{3} \frac{f_{\max}^2}{L} \quad (11)$$

tu $\Delta L = \frac{8}{3} \frac{f_{\max}^2}{L}$ jest przyrostem długości krzywej zwisu

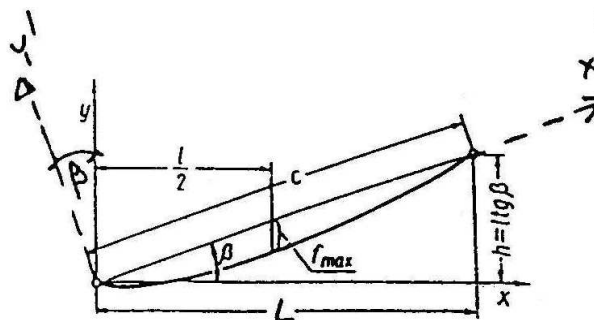
$$c = L \left(1 + \frac{h^2}{2L^2} \right) = L \left(1 + \frac{\text{tg}^2 \beta}{2} \right) \quad (11A)$$

Często spotyka się także zapis (przyjmując $h \Rightarrow 0$):

$$s = \frac{L}{\cos \beta} + \frac{q^2 L^3}{24H^2 \cos^2 \beta} \quad (10)$$

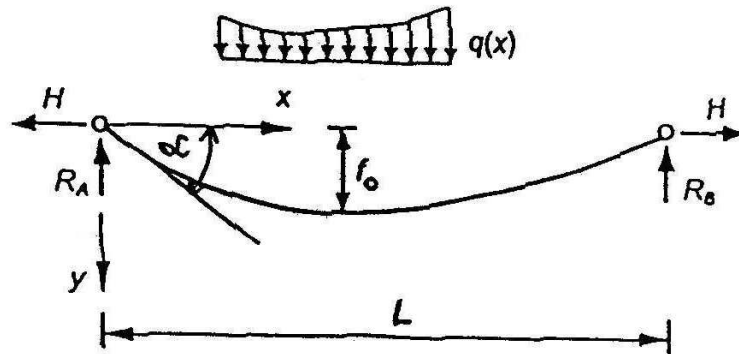
Składnik w nawiasie ze wzoru (11A) upraszcza się gdy $\beta \Rightarrow 0$ wg:

$$1 + \frac{\text{tg}^2 \beta}{2} = \frac{1}{\cos \beta}$$



ad b)

Przyjmując schemat statyczny cięgna standardowego z podporami na jednym poziomie kładziemy $\beta = 0$:



Ze względu na małą wartość strzałki cięgna f_0 ($\frac{f_0}{L} \leq \frac{1}{10}$) w obliczeniach cięgien można przyjąć paraboliczny kształt osi cięgna pod obciążeniem równomiernym, czyli:

$$y = \frac{4f_0}{L^2} x(L - x) \quad (12)$$

Wtedy zakłada się, że wartość siły rozciągającej cięgna jest praktycznie stała i równa rozporowi:

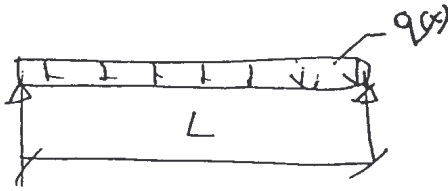
$$s = \frac{H}{\cos \alpha} \cong H, \quad \text{bowiem } \cos \alpha \rightarrow 1 \quad (\text{mały kąt } \alpha)$$

Ostatecznie siła w cięgnie jest sumą rozporu od obciążenia zewnętrznego oraz wstępnego naciągu.

Z warunków równowagi wynika, że kształt cięgna wiotkiego proporcjonalny jest do wykresu momentu zginającego wyznaczonego jak dla belki swobodnie podpartej. Możemy więc przyjąć, korzystając z analogii belkowej, że:

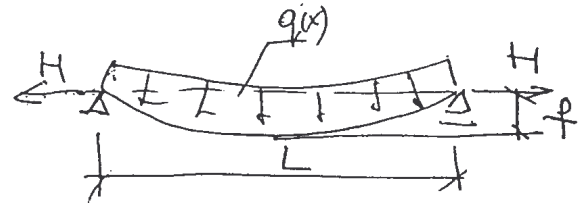
$$y = \frac{M(x)}{H} \quad \text{i} \quad f = \frac{M_{\max}}{H} \quad (13)$$

BELKA



$$M = \frac{qL^2}{8}$$

CIĘGNO



$$H = \frac{M}{f} = \frac{qL^2}{8f_0} \quad (14)$$

Dla cięgien z podporami na jednym poziomie ($\beta = 0$ i $c = L$) **równanie trzeciego stopnia na wielkość rozporu określa się z warunku stałej długości cięgna** o wartości „s” wg:

$$s = c + \Delta L \quad (15)$$

Przyrost długości cięgna (Δl) pod wpływem dodatkowego obciążenia równomiernego można określić ze wzoru (11) lub następująco:

$$\Delta l = \frac{(H_1 - H_0) \cdot L}{EA}; \quad (16)$$

gdzie: H_0 - naciąg wstępny

H_1 - wartość rozporu od całkowitego obciążenia cięgna

Wobec tego długość cięgna s_0 o strzałce początkowej f_0 wynosi ($\cos\beta = 1$) (wzór 10):

$$s_0 = l + \frac{1}{2H_0^2} \int_0^L Q_0^2 dx \quad (17)$$

gdzie: Q_0 - obciążenie poprzeczne - pierwotne

Po zmianie obciążenia do wartości Q_1 otrzymamy

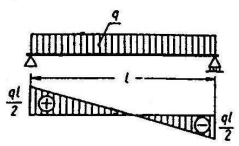
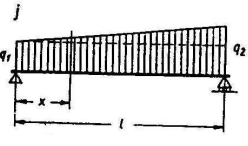
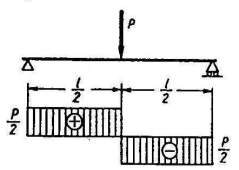
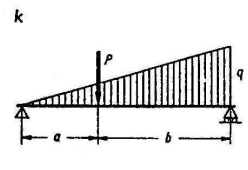
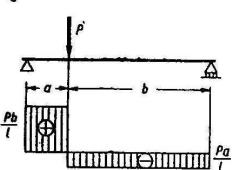
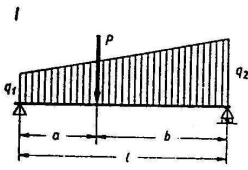
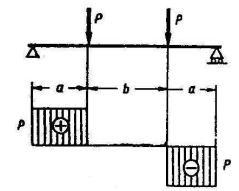
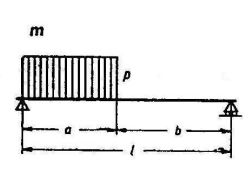
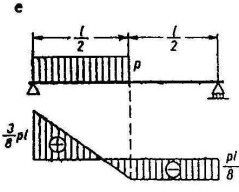
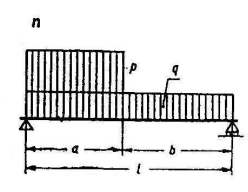
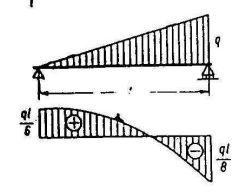
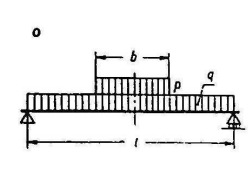
$$s_1 = l + \frac{1}{2H_1^2} \int_0^L Q_1^2 dx \quad (18)$$

gdzie: Q_1 - obciążenie końcowe

Wartość całek $\int_0^L Q^2 dx$ dla różnych obciążeń zestawiono w tabelicy 2.

Tablica 2. Schematy różnych obciążeń cięgna i wartości całki

$$\int_0^l Q^2 dx, \left(Q = \frac{dM}{dx} \right)$$

<p>a</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = \frac{q^2 l^3}{12}$	<p>j</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = \frac{q_1^2 l^3}{45} + \frac{q_2^2 l^3}{45} + \frac{7q_1 q_2 l^3}{180}$
<p>b</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = \frac{P^2 l}{4}$	<p>k</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = \frac{P^2 ab}{l} + \frac{q^2 l^3}{45} + \frac{qPa l}{3} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right)$
<p>c</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = \frac{P^2 ab}{l}$	<p>l</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = \frac{P^2 ab}{l} + \frac{q_1^2 l^3}{45} + \frac{q_2^2 l^3}{45} + \frac{7q_1 q_2 l^3}{180} + 2q_1 Pab \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{3l} - \frac{b}{6l} \right) + 2q_2 Pab \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3l} - \frac{a}{6l} \right)$
<p>d</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = 2P^2 a$	<p>m</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = \frac{P^2 a^2}{12l} (4l - 3a)$
<p>e</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = \frac{5P^2 l^2}{192}$	<p>n</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = \frac{q^2 l^3}{12} + \frac{P^2 a^2}{12l} (4l - 3a) + Pqa^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{3} \right)$
<p>f</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = \frac{q^2 l^3}{45}$	<p>o</p> 	$\int_0^l Q^2 dx = \frac{q^2 l^3}{12} \left[1 + \left(3 - 2 \frac{b}{l} \right) \frac{b^2}{l^2} \frac{P^2}{q^2} + \left(3 - \frac{b^2}{l^2} \right) \frac{b}{l} \frac{P}{q} \right]$

Zakładając stałą siłę w linie na długości (równą składowej poziomej H_1) z prawa Hooke'a otrzymamy: $\Delta L = s_1 - s_0 = \frac{L}{EA} (H_1 - H_0)$ (19)

Ostatecznie otrzymamy **równanie na siłę naciągu** H_1 porównując wzory (17), (18) i (19):

$$H_1^3 + \left(\frac{EA}{2LH_0^2} \int_0^L Q_0^2 dx - H_0 \right) H_1^2 - \frac{EA}{2L} \int_0^L Q_1^2 dx = 0 \quad (20)$$

Wartość H_1 wyznacza się drogą kolejnych przybliżeń dla każdego obciążenia ciągłego; również w wyniku naciągu wstępnego lub napięcia siatki.

Równanie na wielkość naciągu H_1 możemy otrzymać ustalając (z warunku stałej energii potencjalnej układu równej zero) sumę prac sił zewnętrznych i wewnętrznych. **W równaniu (20) nie uwzględniono przyrostu wydłużenia skutkiem zmian temperatury oraz wpływu większego pochylenia cięciwy ciągła niż 15° .**

Uwzględnienie wpływu zmian temperatury prowadzi do modyfikacji wzoru na naciąg H_1 ciągła wiotkiego (21):

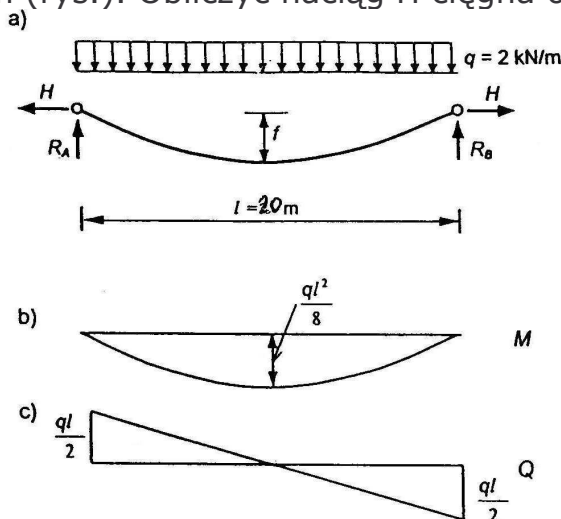
$$H_1^3 + \left[\frac{EA}{2H_0^2 L} \int_0^L Q_0^2 dx - H_0 \pm EA\alpha\Delta t \right] H_1^2 - \frac{EA}{2L} \int_0^L Q_0^2 dx = 0 \quad (21)$$

Wymiarowanie ciągła nośnego przeprowadza się jak dla elementów rozciąganych wprowadzając charakterystykę odpowiednią dla konstrukcji liny. Jak wspomniano wcześniej współczynnik bezpieczeństwa w konstrukcjach linowych jest zróżnicowany (zależny od założonego stopnia bezpieczeństwa) i może osiągnąć **wartości wyjątkowo większe niż 3. Największe współczynniki dotyczą konstrukcji nośnych wind, kolejek linowych, itp. i są przyjmowane w zależności od rodzaju konstrukcji od $8 \div 10$.**

Przykłady obliczeniowe

Zadanie 1

Jest dane cięgno o długości $s = 21$ m i rozpiętości $l = 20$ m poddane obciążeniu $q = 2$ kN/m (rys.). Obliczyć naciąg H cięgna oraz strzałkę zwisu f .



Cięgno pod wpływem obciążenia $q = \text{const}$

Reakcje pionowe:

$$R_A = R_B = \frac{qL}{2} = \frac{2 \cdot 20}{2} = 20 \text{ kN.}$$

Wykresy M i Q dla tego przypadku obciążenia podano na rysunku (c).

Wartość wyrażenia $\int_0^L Q^2 dx$ obliczymy, korzystając z tzw. całkowania

graficznego lub skorzystamy z tablicy całek.

$$\int_0^L Q^2 dx = 2 \cdot \frac{qL}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{qL}{2} = \frac{q^2 L^3}{12}.$$

Równanie cięgna ma więc postać (wzór (11)):

$$21 = 20 + \frac{1}{2H^2} \cdot \frac{2^2 \cdot 20^3}{12}.$$

Z rozwiązania równania otrzymuje się $H = 36,5$ kN.

Strzałka zwisu cięgna wynosi

$$f = \frac{M_{\max}}{H} = \frac{qL^2}{8H} = \frac{2 \cdot 20^2}{8 \cdot 36,5} = 2,74 \text{ m.}$$

Maksymalną siłę w cięgnie (występującą w miejscu zamocowania cięgna) obliczymy z zależności

$$S = \sqrt{R_A^2 + H^2} = \sqrt{20^2 + 36,5^2} = 41,6 \text{ kN.}$$

Zadanie 2

Uwzględnienie wydłużalności cięga:

$$s = s_0 + \Delta L_s + \Delta L_t; \quad \Delta L_s \cong \frac{Hs_0}{EA}; \quad \Delta L_t = \alpha_t \cdot \Delta T \cdot s_0 \quad (a)$$

gdzie: s_0 - początkowa (w fazie montażu) długość cięga.

Uwzględniając (1) otrzymamy:

$$L = \frac{1}{2H^2} \int_0^L Q^2 dx = s_0 + \frac{Hs_0}{EA} + \alpha_t \Delta T \cdot s_0 \quad (b)$$

Po uporządkowaniu otrzymamy równanie cięga

$$H^3 + H^2 EA \left[1 - \frac{1}{s_0} (L - \alpha_t \Delta T \cdot s_0) \right] = \frac{EA}{2s_0} \int_0^L Q^2 dx \quad (c)$$

Uwaga: jest to inny zapis wzoru (14)

Dane: $A = 5 \text{ cm}^2$ (przekrój cięga)

$$E = 150 \text{ GPa} \quad (15000 \text{ kN/cm}^2), \quad \Delta T = 0$$

Z równania (c) otrzymamy:

$$H^3 + H^2 \cdot 15000 \cdot 5 \left[1 - \frac{1}{20,1} (20 - 0) \right] = \frac{15000 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 20^3}{24 \cdot 20,1},$$

$$H^3 + 373,1H^2 = 4975124,$$

skąd

$$H = 102,3 \text{ kN} \quad \text{i} \quad f = \frac{qL^2}{8H} = \frac{2 \cdot 20^2}{8 \cdot 102,3} = 0,98 \text{ m}.$$

W szczególnym przypadku cięga-struny rozpiętość cięga jest równa jego długości. Wstawiając do (c) $L = s_0$, otrzymuje się (przy $\Delta T = 0$):

$$H = \sqrt[3]{\frac{q^2 L^2 EA}{24}}. \quad (d)$$

Dla danych liczbowych z przykładu przy założeniu, że $L = S_0 = 20 \text{ m}$, naciąg cięga obliczony ze wzoru (d) wynosi

$$H = \sqrt[3]{\frac{2^2 \cdot 20^2 \cdot 75000}{24}} = 171,0 \text{ kN},$$

a strzałka zwisu cięga równa się $f = 0,59 \text{ m}$. Dla cięga nierozciągliwego ($EA = \infty$) naciąg cięga obliczony ze wzoru (d) jest teoretycznie nieskończenie wielki.

Zadanie 3

Obliczyć przyrost siły w cięgnie (w stosunku do siły obliczonej w zadaniu 2), jeśli obciążenie działające na cięgno wzrośnie do wartości $q = 3,0 \text{ kN/m}$, podpora A przesunie się w prawo o wartość $u = 0,05 \text{ m}$, a ponadto nastąpi spadek temperatury $\Delta T = -30^\circ\text{C}$.

Z równania (c) otrzymamy teraz (aktualna rozpiętość cięgna wynosi $L = 20,0 - 0,05 = 19,95 \text{ m}$)

$$H^3 + H^2 \cdot 15000 \cdot 5 \left[1 - \frac{1}{20,1} (19,95 - 0,000012 \cdot (-30) \cdot 20,1) \right] =$$

$$= \frac{15000 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 19,95^3}{24 \cdot 20,1},$$

$$H^3 + 532,7H^2 = 1,111 \cdot 10^7,$$

skąd

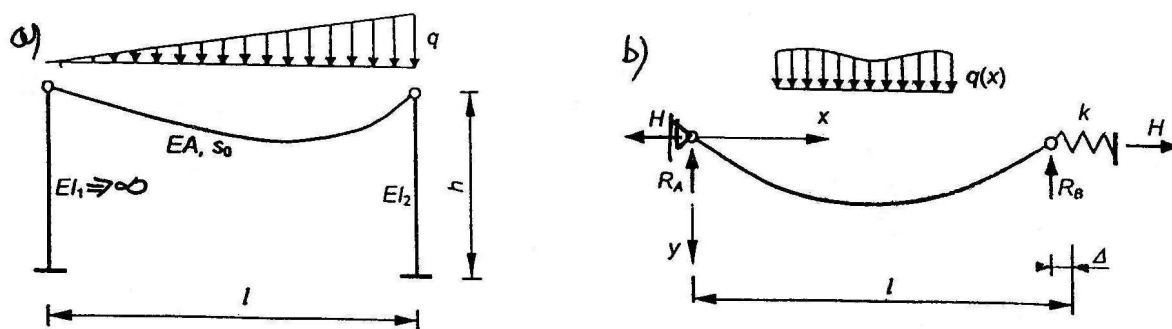
$$H = 129,5 \text{ kN.}$$

Poszukiwany przyrost siły w cięgnie wynosi więc

$$\Delta H = 129,5 - 102,3 = 27,2 \text{ kN.}$$

Wpływ podatności podpór ciągną - sposób iteracyjny

Przemieszczenia podpór ciągn, nawet na pozór niewielkie, wywierają istotny wpływ na zmianę siły w ciągnie, a w konsekwencji powodują też zmianę sił wewnętrznych w samej konstrukcji wsporczej. Podpora ciągną połączona z konstrukcją wsporczą o sztywności k (rys.) doznaje przemieszczenia Δ , które przyczynia się do wzrostu zwisu ciągną i spadku siły w ciągnie. Konstrukcje ciągnowe powinny być zawsze obliczane z uwzględnieniem wpływu przemieszczeń (deformacji) konstrukcji wsporczej na stan sił i przemieszczeń ustroju, ponieważ nieuwzględnienie tego wpływu przyczynia się do niedokładnego, a niekiedy także do niebezpiecznego projektowania konstrukcji.



Rys. Schemat ciągną z podporą sprężystą:
a) obiekt, b) model obliczeniowy

Istnieje wiele sposobów uwzględnienia podatności konstrukcji wsporczej podtrzymującej ustrój ciągnowy. Jedną z prostszych i jednocześnie bardziej poglądowych metod jest metoda kolejnych przybliżeń. Szczegółowy tok postępowania wg metody wyjaśnia przykład liczbowy.

Zadanie

Dane jest cięgno zamocowane na dwóch słupach wspornikowych (rys.). obliczyć poziomy naciąg H cięgna, strzałkę zwisu f oraz maksymalną wartość momentu zginającego w słupach.

Dane:

$$EA = 75000 \text{ kN}, \quad EI_1 = 50000 \text{ kNm}^2, \quad EI_2 = 100000 \text{ kNm}^2,$$

$$L = 30\text{m}, \quad s_o = 30,2 \text{ m}, \quad h = 5\text{m}, \quad q = 5 \text{ kN/m}.$$

Sztywność słupów na przesuw obliczymy z zależności:

$$k_1 = \frac{3EI_1}{h^3} = \frac{3 \cdot 50000}{5^3} = 1200 \text{ kN/m}, \quad k_2 = \frac{3EI_2}{h^3} = \frac{3 \cdot 100000}{5^3} = 2400 \text{ kN/m}$$

I) Pierwsze przybliżenie. Naciąg cięgna obliczymy przy założeniu, że konstrukcja wsporcza jest nieodkształcalna ($k_1=k_2= \infty$). Z równania (c) otrzymuje się:

$$H^3 + H^2 \cdot 75000 \cdot \left[1 - \frac{1}{30,2} (30 - 0) \right] = \frac{75000 \cdot 5^2 \cdot 30^3}{90 \cdot 30,2},$$

$$H^3 + 496,7H^2 = 1,86 \cdot 10^7, \quad \mathbf{H = H_1 = 167,5 \text{ kN}}$$

Przemieszczenia słupów będą więc wynosić:

$$\delta_1^1 = \frac{H_1}{K_1} = \frac{167,5}{1200} = 0,14\text{m}; \quad \delta_2^1 = \frac{H_1}{K_2} = \frac{167,5}{2400} = 0,07\text{m}$$

Stąd rozpiętość cięgna będzie $L_2 = 30,0 - 0,14 - 0,07 = 29,79 \text{ m}$

II) Drugie przybliżenie

$$H^3 + H^2 \cdot 75000 \cdot \left[1 - \frac{1}{30,2} (29,79 - 0) \right] = \frac{75000 \cdot 5^2 \cdot 29,79^3}{90 \cdot 30,2},$$

$$\mathbf{H = H_2 = 128,0 \text{ kN}}$$

$$\delta_1^2 = \frac{128,0}{1200} = 0,107\text{m}; \quad \delta_2^2 = 0,053\text{m}; \quad L_3 = 30,0 - 0,16 = 29,84$$

m

III) Trzecie przybliżenie

$$H_3 = 135 \text{ kN}; \quad L_4 = 30,0 - 0,168 = 29,832 \cong L_3$$

Wobec tego momenty w słupach wyniosą: $M = H \cdot h = 135,0 \cdot 5,0 = 675 \text{ kNm}$

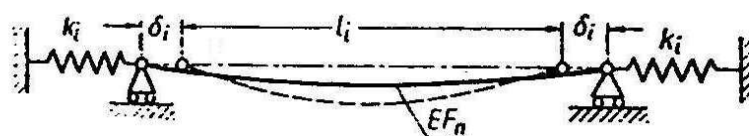
$$\text{oraz } f = \frac{M_{\max}}{H_2} = \frac{qL^2}{9 \cdot \sqrt{3} \cdot H_2} = \frac{5 \cdot 30,0^2}{9\sqrt{3} \cdot 135,0} = 2,14\text{m}$$

Powyższy przykład liczbowy dowodzi, że nieuwzględnienie podatności konstrukcji wsporczej prowadziłoby do błędnego rozwiązania ($H_3=135,0\text{kN}$) < ($H_1=167,5\text{kN}$).

**Niesprężone ustroje ciągnowe podwieszane
naciągach brzegowych (krawędziowych)**

Obliczenia te należy prowadzić według następującego schematu:

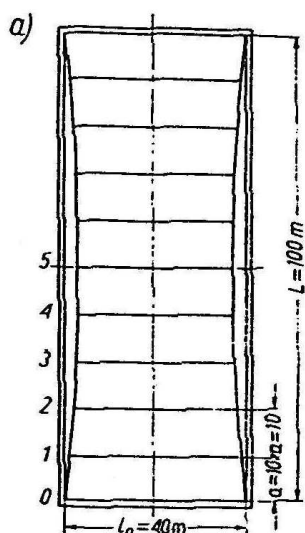
- 1° wyznaczamy parametry geometryczne i siły działające na układ pod wpływem ciężaru własnego konstrukcji. Zadanie to wykonuje się bez specjalnych trudności ponieważ większość danych należy wstępnie założyć, a pozostałe wyznacza się z prostej zależności $f = M/H$.
- 2° zakładamy stałą podatność k_i ciągną brzegowego na obciążenia boczne w płaszczyźnie poziomej, przy czym $k_i = \frac{\delta_i}{q_b}$,
gdzie: δ_i - boczne przesunięcie ciągną brzegowego w węźle i ,
 q_b - równomiernie rozłożone parcie na ciągną brzegowe od ciągnen nośnych siatki.
- 3° obliczamy naciągi H_{if} ciągnen nośnych pod wpływem dodatkowego obciążenia tych ciągnen, przy czym zakłada się, że ciągną nośne są rozpięte między podporami o poziomej podatności k_i



Model podwieszenia ciągną nośnego naciągach brzegowych

- 4° wyznaczamy naciąg H_{1b} ciągną brzegowego obciążonego w płaszczyźnie bocznej naciągami H_{1i} , w pionowej - reakcjami V_{1i} , oraz odpowiadające temu naciągowi poziome zmiany rozpiętości ciągnen Δl_i (rys.).
- 5° wyznaczamy nowe położenie równowagi ciągną brzegowego i odpowiadające temu położeniu nowe naciągi H_{2i} ciągnen nośnych z

warunku, aby poziome przemieszczenie cięgna na brzegu doprowadziło do zrównoważenia sił między tymi cięgnami i cięgnami siatki.

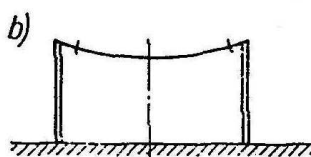


Przykład

Obliczyć ustrój pokazany na rys. Dane: ciężar własny cięgna brzegowego $q_{wb} = 0,036$ T/m, cięgna nośnego $q_{0i} = 0,01$ T/m, obciążenie dodatkowe cięgna nośnego $q_i = 0,1$ T/m, sztywność podłużna cięgna brzegowego $Af_b = 5 \cdot 10^4 T$, cięgna nośnego - $AF_n = 25 \cdot 10^2 T$.

Powierzchnia poprzecznego przekroju cięgna brzegowego $A_b = 40$ cm², cięgna nośnego $A_n = 2$ cm².

Maksymalne strzałki zwisu pod własnym obciążeniem wynoszą dla wszystkich cięgien $f_{max} = 1$ m.



Ustrój bezwęzłowy na cięgnach brzegowych

Naciąg cięgna nośnego wyznaczamy ze wzoru:

$$H_{0i} = \frac{q_{0i} l_i^2}{8f} = \frac{0,01 \cdot 40^2}{8 \cdot 1} = 2T$$

Obciążenia skupione cięgna brzegowego siłami H_{0i} aproksymujemy parciem równomiernie rozłożonym $q_{0b} = \frac{H_{0i}}{a} = \frac{2}{10} = 0,2T/m$. Naciąg cięgna

brzegowego przy $q_{0b} = 0,2$ T/m i $f_{max} = 1$ m wyniesie

$$H_{0b} = \frac{0,2 \cdot 100^2}{8 \cdot 1} = 250T$$

Zależność naciągu poziomego H_b cięgna brzegowego od parcia q_b na nie znajdziemy z równania równowagi cięgna obustronnie zakotwionego

$$H_b^3 + \left(\frac{q_{0b}^2 L^2 EA_b}{24H_{0b}^2} - H_{0b} \right) H_b^2 - \frac{L^2 EA_b}{24} q_b^2 = 0$$

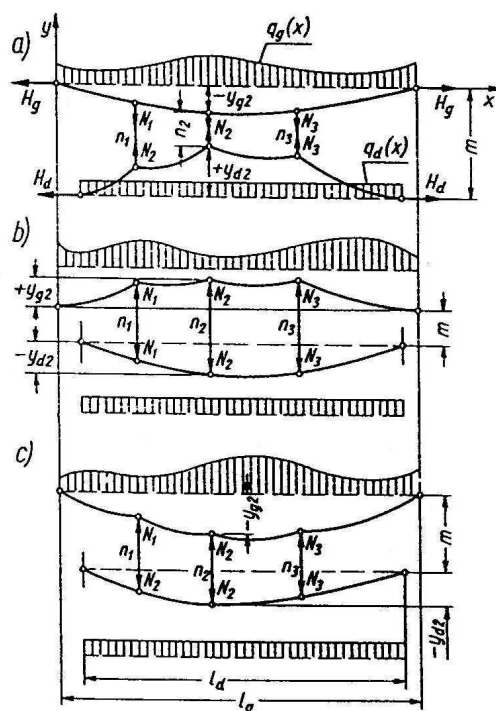
Po podstawieniu wartości liczbowych jest

$$H_b^3 + \left(\frac{0,2^2 \cdot 100^2 \cdot 5 \cdot 10^4}{24 \cdot 250^2} - 250 \right) H_b - \frac{100^2 \cdot 5 \cdot 10^4}{24} q_b^2 = 0$$

i.t.d.

Płaski ustrój wielocięgnowy

Swobodnie zwisające w jednej płaszczyźnie i współpracujące ze sobą cięgna tworzą płaski ustrój wielocięgnowy. Typowym przykładem takiego ustroju są np. dwa cięgna zwisające w tej samej pionowej płaszczyźnie i połączone ze sobą równoległymi łącznikami. Będziemy je nazywali cięgnami sprzężonymi. Układy takie spotyka się np. w sieci przewodów trakcyjnych i przy dachach namiotowych podwieszonych na cięgnach. Różne systemy cięgien sprzężonych przedstawiają rys. a, b i c.



Układy dwóch cięgien sprzężonych

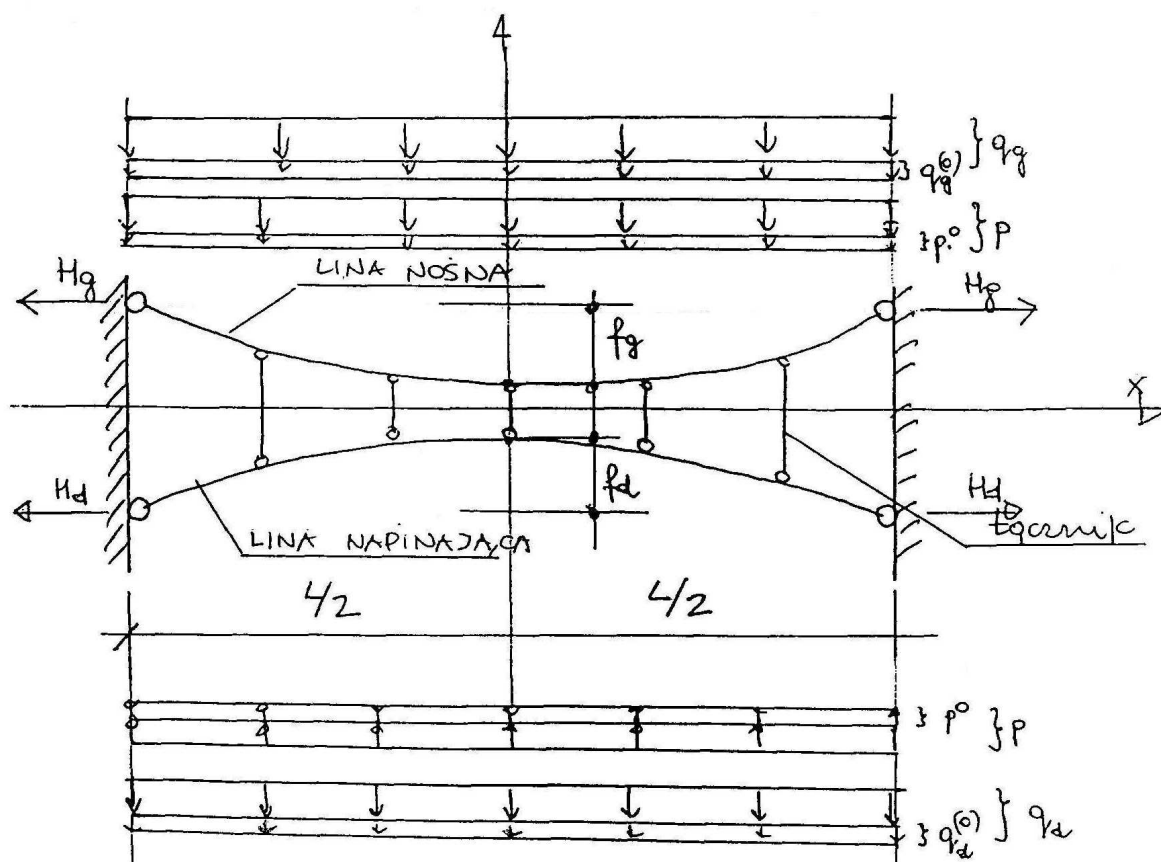
Na rys. a, b, c przedstawiono dwa cięgna, górne główne i dolne podtrzymujące, połączone między sobą pionowymi łącznikami (rozciągany lub ściskanymi).

Na rys. (a) górne główne cięgno jest połączone z dolnym, podtrzymującym przy pomocy podwieszek, a na rys. (b, c) dolne cięgno podtrzymujące podwieszane jest do cięgna górnego na sztywnych rozpórkach.

Gdyby na rys. (c) dolne cięgno było cięgnem głównym a cięgno górne - podtrzymującym, wówczas podwieszki mogłyby być wiotkie.

Przykład liczbowy

Zakładając, że wiązary linowy ma w przelocie więcej niż trzy liny łącznikowe (lub węzły skratowania) możemy przyjąć, że obciążenie skupione z łączników na liny nośną i napinającą można zastąpić równoważnym obciążeniem równomiernie rozłożonym. Zakładamy, że w stanie montażowym oba cięgna przyjmują kształt paraboli i w łącznikach panują siły rozciągające. Niech będzie obciążenie wstępne cięgien $q_g^{(0)}$ odpowiadające mu oddziaływanie łączników $q_d^{(0)}$.



Łączne obciążenie wstępne i końcowe górnego i dolnego ciągu wywołają naciąg wstępny

$$H_g^{(0)} = \frac{q_p^{(0)} + p}{8f_g^{(0)}} L^2 \quad \text{i} \quad H_d^{(0)} = \frac{p_0 - q_d^{(0)}}{8f_d^{(0)}} L^2 \quad (1)$$

Dla prostego przykładu wpływu zmian temperatury i obciążenia dodatkowego ciągu szadzą do wartości q_d otrzymamy nowe naciągi końcowe lin:

$$H_g = \frac{g_g + p}{8f_g} L^2 \quad \text{i} \quad H_d = \frac{p - g_d}{8f_d} L^2 \quad (2)$$

Wartość naciągów ciągów otrzymamy przyrównując przyrost długości ciągów po przyłożeniu obciążenia dodatkowego z wydłużeniem ich pod wpływem zmian temperatury oraz zmian wartości naciągów obliczonych z (1) i (2).

Korzystając ze wzorów (5) i dalszych - str. 3 na przyrost długości ciągu można napisać dla ciągu górnego:

$$\Delta S = S - S^{(0)} = \frac{\int_0^L Q_p^2 dx}{2H_g^2} - \frac{8}{3} \frac{(f_g^{(0)})^2}{L}, \quad (3)$$

a także

$$\Delta S = \varepsilon(t - t^{(0)}) \cdot l + \frac{H_g - H_g^{(0)}}{EF_g} \cdot L \quad (4)$$

Ponieważ dla obciążenia ciągłego mamy

$$\frac{\int_0^L Q_p^2 dx}{2H_g^2} = \frac{(g_g + p)^2 L^3}{12 H_g^2} = \frac{8f_g^2 H_g^2}{3H_g^2 L} = \frac{8f_g^2}{3 \cdot L}, \quad (5)$$

to porównując (3) z (4) oraz wstawiając (5) otrzymamy:

$$H_g = \left[\frac{8}{3} EA_g \frac{f_g^{(0)2} - f_g^2}{l^2} - \varepsilon(t_0 - t) EA_g - H_g^{(0)} \right] \quad (6)$$

i analogicznie dla ciągu dolnego:

$$H_d = - \left[\frac{8}{3} EA_d \frac{f_d^{(o)2} - f_d^2}{l^2} - \varepsilon(t_o - t)EA_d - H_d^{(o)} \right] \quad (7)$$

Warunkiem współpracy obu cięgien jest stała długość łączników przed i po dociążeniu.

Tak więc musi być spełniony warunek:

$$f_g^{(o)} + f_d^{(o)} = f_g + f_d \quad (8)$$

Porównując naciągi według (6) i (7) z (2):

$$\begin{aligned} \frac{8f_g}{L^2} \left[\frac{8}{3} EA_g \frac{f_g^{(o)2} - f_g^2}{L^2} - \varepsilon(t_o - t) - H_p^{(o)} \right] + g_g &= \\ = \frac{8f_d}{L^2} \left[\frac{8}{3} EA_d \frac{f_d^{(o)2} - f_d^2}{L^2} - \varepsilon(t_o - t) - H_d^{(o)} \right] - g_d & \end{aligned} \quad (9)$$

Z równania (8) otrzymamy:

$$f_d = f_g^{(o)} + f_d^{(o)} - f_g \quad (10)$$

Podstawiając (10) do (9) otrzymamy równanie trzeciego stopnia na f_g postaci (11)

$$\boxed{Af_g^3 - Bf_g^2 - Cf_g = 0} \quad (11)$$

Z równania (10) można wyznaczyć również pożądaną wartość f_d .

Warto zauważyć, że równanie (11) ma postać równania cięga (na wielkość naciągu).

